Due parole sull’entanglement quantistico

L'entanglement quantistico rappresenta uno dei fenomeni più straordinari e controintuitivi della meccanica quantistica, una manifestazione della non-località che ha sfidato la comprensione classica della realtà fisica e ha aperto profonde questioni epistemologiche sulla natura stessa della conoscenza scientifica. Questo fenomeno, che Albert Einstein definì sprezzantemente "spukhafte Fernwirkung" (azione spettrale a distanza), costituisce oggi non soltanto un pilastro fondamentale della teoria quantistica, ma anche la base tecnologica per le applicazioni emergenti nel campo dell'informazione quantistica, della crittografia e del calcolo quantistico.

L'entanglement si manifesta quando due o più particelle quantistiche interagiscono in modo tale che lo stato quantico di ciascuna particella non può essere descritto indipendentemente dallo stato delle altre, anche quando le particelle sono separate da distanze arbitrariamente grandi. Questa correlazione non classica implica che la misura effettuata su una particella influenza istantaneamente lo stato dell'altra, indipendentemente dalla distanza che le separa. Tuttavia, come vedremo, questa influenza non permette la trasmissione di informazione a velocità superluminali, preservando così la coerenza con i principi della relatività speciale.

Fondamenti Matematici della Teoria Quantistica

Per comprendere pienamente l'entanglement, è necessario richiamare i fondamenti matematici della meccanica quantistica. Lo stato di un sistema quantistico è descritto da un vettore in uno spazio di Hilbert complesso, che possiamo denotare con il formalismo di Dirac come $|\psi\rangle$. Questo vettore di stato contiene tutta l'informazione fisica accessibile sul sistema e la sua evoluzione temporale è governata dall'equazione di Schrödinger.

Per un sistema costituito da una singola particella con spin 1/2, come un elettrone, lo spazio degli stati è bidimensionale. Gli stati di base possono essere scelti come gli autostati dell'operatore di spin lungo una direzione particolare, convenzionalmente l'asse z. Questi stati vengono indicati come $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, oppure $|0\rangle$ e $|1\rangle$ nella notazione dell'informazione quantistica. Un generico stato di spin può essere scritto come una sovrapposizione lineare:

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

dove α e β sono numeri complessi che soddisfano la condizione di normalizzazione $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. I coefficienti α e β sono chiamati ampiezze di probabilità, e i loro moduli quadrati rappresentano le probabilità di misurare lo spin nella direzione su o giù rispettivamente.

Quando consideriamo un sistema composto da due particelle, lo spazio di Hilbert totale è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert individuali. Se la prima particella ha uno spazio di stati H_1 e la seconda ha uno spazio di stati H_2, lo spazio del sistema composto è $H = H_1 \otimes H_2$. Per due particelle di spin 1/2, questo spazio è quadridimensionale e una base ortonormale è costituita dai quattro stati prodotto:

$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$ $|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$ $|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$ $|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$

Un generico stato del sistema bipartito può essere espresso come una sovrapposizione lineare di questi stati di base:

$|\Psi\rangle = c_1|\uparrow\uparrow\rangle + c_2|\uparrow\downarrow\rangle + c_3|\downarrow\uparrow\rangle + c_4|\downarrow\downarrow\rangle$

con la condizione di normalizzazione $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 = 1$.

Gli Stati Entangled e la Loro Struttura Matematica

Un aspetto fondamentale della struttura matematica degli stati quantistici composti è la distinzione tra stati separabili e stati entangled. Uno stato bipartito si dice separabile se può essere scritto come un prodotto tensoriale di stati individuali:

$|\Psi_sep\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$

dove $|\psi\rangle_1$ e $|\varphi\rangle_2$ sono stati ben definiti rispettivamente per la particella 1 e per la particella 2. In questo caso, le due particelle possiedono proprietà individuali definite e la conoscenza completa dello stato del sistema composto si riduce alla conoscenza degli stati delle singole particelle.

Al contrario, uno stato si dice entangled se non può essere fattorizzato in questo modo. In altre parole, uno stato $|\Psi\rangle$ è entangled se non esistono stati $|\psi\rangle_1$ e $|\varphi\rangle_2$ tali che $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$. L'entanglement rappresenta quindi una forma di correlazione quantistica che non ha analogo classico e che non può essere ridotta a proprietà individuali delle particelle costituenti.

Gli esempi paradigmatici di stati entangled sono gli stati di Bell, che costituiscono una base ortonormale per lo spazio degli stati di due qubit. Questi quattro stati sono:

$|\Phi^+\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ $|\Phi^-\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ $|\Psi^+\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$

Consideriamo lo stato di singoletto $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$. Questo stato possiede una simmetria notevole: è antisimmetrico rispetto allo scambio delle due particelle e ha spin totale zero. Se tentassimo di fattorizzarlo nella forma $|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$, dovremmo avere:

$(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} = (\alpha_1|\uparrow\rangle_1 + \beta_1|\downarrow\rangle_1) \otimes (\alpha_2|\uparrow\rangle_2 + \beta_2|\downarrow\rangle_2)$

Espandendo il prodotto tensoriale a destra otteniamo:

$\alpha_1\alpha_2|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_1\beta_2|\uparrow\downarrow\rangle + \beta_1\alpha_2|\downarrow\uparrow\rangle + \beta_1\beta_2|\downarrow\downarrow\rangle$

Per uguagliare questo con lo stato di singoletto, dovremmo avere $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\beta_1\beta_2 = 0$, $\alpha_1\beta_2 = 1/\sqrt{2}$ e $\beta_1\alpha_2 = -1/\sqrt{2}$. Queste quattro equazioni sono incompatibili tra loro, dimostrando matematicamente l'impossibilità di fattorizzare lo stato di singoletto.

La Matrice Densità e l'Entanglement

Per caratterizzare quantitativamente l'entanglement, è utile introdurre il formalismo della matrice densità. La matrice densità ρ di un sistema quantistico è definita, per uno stato puro $|\psi\rangle$, come:

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Questa rappresentazione è particolarmente utile per descrivere stati misti, che sono insiemi statistici di stati puri, e per trattare sottosistemi di sistemi composti.

Per un sistema bipartito descritto dallo stato $|\Psi\rangle$, possiamo definire la matrice densità ridotta del sottosistema 1 tracciando sul sottosistema 2:

$\rho_1 = Tr_2(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$

dove l'operazione di traccia parziale Tr_2 somma su tutti gli stati possibili del sottosistema 2. Un criterio importante per l'entanglement è il seguente: se lo stato composto $|\Psi\rangle$ è separabile, allora la matrice densità ridotta ρ_1 descrive uno stato puro, ossia $\rho_1^2 = \rho_1$. Se invece $|\Psi\rangle$ è entangled, allora ρ_1 descrive uno stato misto, con $\rho_1^2 \neq \rho_1$.

Consideriamo lo stato di singoletto $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$. La matrice densità del sistema totale è:

$\rho = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| = 1/2(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|)$

Espandendo otteniamo:

$\rho = 1/2(|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|)$

La matrice densità ridotta per la particella 1 si ottiene tracciando sulla particella 2:

$\rho_1 = Tr_2(\rho) = 1/2(|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow|_1 + |\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|_1) = 1/2\ I_1$

dove I_1 è la matrice identità nello spazio della particella 1. Questo risultato mostra che, sebbene il sistema composto sia in uno stato puro perfettamente definito, ciascuna particella individualmente si trova in uno stato massimamente misto, corrispondente a completa incertezza. Questo è un aspetto profondamente controintuitivo dell'entanglement: il tutto possiede proprietà definite che le parti non possiedono.

L'Entropia di Entanglement

Una misura quantitativa dell'entanglement per stati puri bipartiti è fornita dall'entropia di von Neumann della matrice densità ridotta. Per un sistema bipartito in uno stato puro $|\Psi\rangle$, definiamo l'entropia di entanglement come:

$S(\rho_1) = -Tr(\rho_1 \log_2 \rho_1)$

dove ρ_1 è la matrice densità ridotta di uno dei due sottosistemi. Questa entropia è zero per stati separabili e assume il valore massimo per stati massimamente entangled.

Per lo stato di singoletto, abbiamo visto che $\rho_1 = 1/2\ I$. Gli autovalori di questa matrice sono entrambi 1/2, quindi:

$S(\rho_1) = -1/2 \log_2(1/2) - 1/2 \log_2(1/2) = -1/2(-1) - 1/2(-1) = 1$

Questo valore di 1 ebit (unità di entanglement) rappresenta il massimo entanglement possibile per due qubit e caratterizza tutti gli stati di Bell come massimamente entangled.

Per sistemi di dimensionalità maggiore, l'entropia di entanglement può assumere valori più elevati. Per un sistema bipartito dove ciascun sottosistema ha dimensione d, l'entropia massima è $\log_2 d$. Questo valore massimo viene raggiunto quando la matrice densità ridotta è proporzionale all'identità, $\rho_1 = I/d$.

Il Paradosso EPR e la Sfida alla Completezza della Meccanica Quantistica

Nel 1935, Einstein, Podolsky e Rosen pubblicarono un articolo seminale che avrebbe influenzato profondamente lo sviluppo della fisica quantistica e la filosofia della scienza. Il loro argomento, noto come paradosso EPR, mirava a dimostrare che la meccanica quantistica, nella sua formulazione ortodossa dovuta principalmente a Bohr e Heisenberg, non poteva essere una teoria completa della realtà fisica.

L'argomento EPR si basa su alcune assunzioni considerate ragionevoli dai suoi autori. La prima è il principio di realtà: se possiamo predire con certezza il valore di una grandezza fisica senza disturbare il sistema, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a quella grandezza. La seconda è la località, o più precisamente la separabilità: operazioni eseguite su un sistema non possono influenzare istantaneamente un sistema spazialmente separato.

Einstein, Podolsky e Rosen considerarono un sistema di due particelle correlate, preparate in modo tale che la misura di posizione o impulso su una particella permette di predire con certezza il valore corrispondente sull'altra particella. Nella formulazione originale, essi considerarono variabili continue come posizione e impulso, ma l'essenza dell'argomento può essere resa più chiara considerando variabili discrete come lo spin.

Supponiamo di preparare due particelle nello stato di singoletto $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ e di separarle spazialmente. Se misuriamo lo spin della particella 1 lungo l'asse z e troviamo il risultato "su", possiamo immediatamente predire con certezza che una misura dello spin della particella 2 lungo lo stesso asse darà il risultato "giù". Secondo il criterio di realtà EPR, lo spin della particella 2 lungo l'asse z deve quindi corrispondere a un elemento della realtà fisica.

Ma potremmo anche scegliere di misurare lo spin della particella 1 lungo l'asse x. Anche in questo caso, il risultato della misura ci permetterebbe di predire con certezza il risultato di una corrispondente misura sulla particella 2. Quindi, seguendo lo stesso ragionamento, anche lo spin della particella 2 lungo l'asse x deve corrispondere a un elemento della realtà fisica.

Qui sorge il problema: secondo la meccanica quantistica, lo spin lungo l'asse z e lo spin lungo l'asse x sono osservabili incompatibili, descritte da operatori che non commutano. Il principio di indeterminazione di Heisenberg afferma che non possono avere simultaneamente valori definiti. Tuttavia, l'argomento EPR sembra mostrare che entrambi devono essere elementi della realtà fisica per la particella 2, indipendentemente da quale misura scegliamo di eseguire sulla particella 1 spazialmente separata.

Einstein, Podolsky e Rosen conclusero che la meccanica quantistica deve essere incompleta: esistono elementi della realtà fisica che la teoria non descrive, chiamati variabili nascoste. Una teoria più completa includerebbe queste variabili e permetterebbe di assegnare valori definiti a tutte le osservabili simultaneamente, restaurando così una visione classica della realtà.

La Risposta di Bohr e l'Interpretazione di Copenaghen

Niels Bohr rispose quasi immediatamente all'articolo EPR, difendendo la completezza della meccanica quantistica e criticando le assunzioni implicite nell'argomento. La risposta di Bohr è profonda ma notoriamente difficile da interpretare, riflettendo la natura sottile dell'interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica.

Bohr argomentò che il criterio di realtà proposto da Einstein, Podolsky e Rosen è troppo ingenuo perché non tiene conto della natura essenzialmente contestuale delle proprietà quantistiche. Secondo Bohr, non ha senso attribuire proprietà a un sistema quantistico indipendentemente dal contesto sperimentale, che include l'intero apparato di misura. Le proprietà fisiche non sono attributi intrinseci degli oggetti quantistici, ma emergono dall'interazione tra il sistema e gli strumenti di misura.

Nel caso dell'argomento EPR, Bohr sostenne che la scelta di quale osservabile misurare sulla particella 1 costituisce parte del contesto sperimentale per l'intero sistema bipartito, includendo anche la particella 2. La scelta di misurare lo spin lungo l'asse z piuttosto che lungo l'asse x definisce due diversi arrangiamenti sperimentali mutuamente esclusivi. Non è quindi legittimo assumere che lo spin lungo entrambi gli assi corrisponda simultaneamente a elementi della realtà fisica, poiché questi "elementi" sono definiti relativamente a contesti sperimentali incompatibili.

Questa posizione riflette il concetto bohriano di complementarità: aspetti differenti di un sistema quantistico, descritti da osservabili incompatibili, sono complementari nel senso che forniscono informazioni che sono entrambe necessarie per una descrizione completa ma non possono essere simultaneamente realizzate nello stesso contesto sperimentale.

L'interpretazione di Copenaghen, nella sua formulazione più radicale, nega quindi la premessa realista dell'argomento EPR. La meccanica quantistica non è incompleta perché descrive tutto ciò che può essere descritto in modo coerente. Chiedere di più, chiedere una descrizione che assegni valori definiti a tutte le osservabili simultaneamente, significa fraintendere la natura della realtà quantistica.

Le Disuguaglianze di Bell e la Confutazione del Realismo Locale

Il dibattito tra Einstein e Bohr rimase largamente filosofico per tre decenni, apparentemente non suscettibile di risoluzione sperimentale. La svolta venne nel 1964, quando John Stewart Bell dimostrò che le ipotesi di realismo e località, se combinate, conducono a predizioni sperimentali verificabili che differiscono da quelle della meccanica quantistica.

Bell considerò una versione più precisa e operativa delle idee di Einstein: l'esistenza di teorie a variabili nascoste locali. In tali teorie, ogni particella possiede variabili nascoste λ che determinano i risultati di tutte le possibili misure. La località richiede che il risultato della misura sulla particella 1 dipenda solo da λ, dalla scelta dell'osservabile misurata su quella particella, e non dalla scelta dell'osservabile misurata sulla particella 2 spazialmente separata.

Formalmente, indichiamo con $A(a, \lambda)$ il risultato della misura dell'osservabile a sulla particella 1, dove λ rappresenta le variabili nascoste. Similmente, $B(b, \lambda)$ è il risultato della misura dell'osservabile b sulla particella 2. La località richiede che A dipenda solo da a e λ, non da b, e viceversa. Le variabili nascoste λ sono distribuite secondo una distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$, con $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$.

Per misure di spin, i risultati A e B assumono valori ± 1. La correlazione tra le misure è data da:

$$E(a, b) = \int A(a, \lambda)\, B(b, \lambda)\, \rho(\lambda)\, d\lambda$$

Bell considerò un esperimento in cui si misurano gli spin lungo tre diverse direzioni, che possiamo chiamare a, b e c. Costruì una particolare combinazione di correlazioni, nota come quantità di Bell:

$$S = E(a, b) - E(a, c) + E(b, c) + E(b, d)$$

dove a, b, c, d sono quattro diverse direzioni di misura. Bell dimostrò che, in qualsiasi teoria a variabili nascoste locali, questa quantità deve soddisfare la disuguaglianza:

$$-2 \leq S \leq 2$$

Questa è una delle forme delle disuguaglianze di Bell. La dimostrazione è elegante e si basa sulla località e sul realismo. Poiché A e B possono assumere solo valori ± 1, possiamo scrivere:

$$S = \int [A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(c, \lambda) + A(b, \lambda)B(c, \lambda) + A(b, \lambda)B(d, \lambda)]\, \rho(\lambda)\, d\lambda$$

Fattorizzando:

$$S = \int [A(a, \lambda)(B(b, \lambda) - B(c, \lambda)) + A(b, \lambda)(B(c, \lambda) + B(d, \lambda))]\, \rho(\lambda)\, d\lambda$$

Poiché $B(b, \lambda)$ e $B(c, \lambda)$ sono ± 1, la loro differenza è 0 oppure ± 2. Se $B(b, \lambda) - B(c, \lambda) = 0$, allora $B(b, \lambda) = B(c, \lambda)$, quindi $B(c, \lambda) + B(d, \lambda)$ assume i valori 0 o ± 2. Se invece $B(b, \lambda) - B(c,$

λ) = ±2, allora B(b, λ) = -B(c, λ), quindi B(c, λ) + B(d, λ) = 0. In ogni caso, per ogni valore di λ, l'integrando ha valore assoluto al massimo 2, il che implica |S| ≤ 2.

Tuttavia, la meccanica quantistica predice che per opportune scelte delle direzioni di misura, la quantità S può violare questa disuguaglianza. Consideriamo lo stato di singoletto $|\Psi^-\rangle$ e scegliamo le direzioni a, b, c, d in un piano, con angoli rispettivamente 0°, 45°, 90° e 135°. Le predizioni quantistiche per le correlazioni sono:

$E(\theta) = -\cos(\theta)$

dove θ è l'angolo tra le due direzioni di misura. Quindi:

$E(a, b) = -\cos(45°) = -1/\sqrt{2}$ $E(a, c) = -\cos(90°) = 0$ $E(b, c) = -\cos(45°) = -1/\sqrt{2}$ $E(b, d) = -\cos(90°) = 0$

Ma aspetta, dobbiamo considerare la combinazione CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt):

$S = E(a, b) - E(a, c) + E(b, c) + E(b, d)$

Con le direzioni ottimali (0°, 45°, 22.5°, 67.5°), la meccanica quantistica predice:

$S_{QM} = 2\sqrt{2} \approx 2.828$

che viola clamorosamente la disuguaglianza di Bell! Questo risultato straordinario dimostra che nessuna teoria a variabili nascoste locali può riprodurre tutte le predizioni della meccanica quantistica.

Gli Esperimenti di Aspect e la Verifica Sperimentale

Le disuguaglianze di Bell trasformarono la questione EPR da dibattito filosofico in questione empiricamente verificabile. Tuttavia, realizzare esperimenti conclusivi si rivelò tecnicamente molto impegnativo. I primi test, condotti negli anni '70 da Freedman e Clauser e da altri gruppi, supportarono la meccanica quantistica ma erano soggetti a varie limitazioni tecniche, note come loopholes.

La svolta decisiva avvenne nei primi anni '80 con gli esperimenti di Alain Aspect e collaboratori a Orsay, Francia. Aspect realizzò una serie di esperimenti sempre più sofisticati utilizzando coppie di fotoni entangled emessi in cascate atomiche dal calcio eccitato. Il setup sperimentale prevedeva due rivelatori distanti, ciascuno con la possibilità di scegliere tra diverse direzioni di polarizzazione da misurare.

L'esperimento cruciale del 1982 introdusse una innovazione fondamentale: la scelta della direzione di polarizzazione da misurare veniva fatta mentre i fotoni erano in volo, usando commutatori acusto-ottici che cambiavano rapidamente la direzione di analisi. Questo assicurava che la scelta della misura su un fotone avvenisse in una regione spazio-temporale separata (in senso relativistico) dall'evento di misura sull'altro fotone. In questo modo, nessun segnale viaggiante alla velocità della luce o più lentamente poteva collegare le due misure, garantendo la località dell'esperimento.

I risultati degli esperimenti di Aspect mostrarono violazioni delle disuguaglianze di Bell in accordo con le predizioni quantistiche, con significatività statistica elevata. Il parametro S, che secondo le teorie locali realistiche dovrebbe soddisfare $|S| \leq 2$, fu misurato con valori attorno a 2.7, vicino al valore quantistico teorico di $2\sqrt{2} \approx 2.828$.

Questi risultati furono confermati e raffinati da numerosi esperimenti successivi. Nel 1998, il gruppo di Anton Zeilinger a Innsbruck condusse esperimenti con fotoni entangled separati da distanze di chilometri. Nel 2015, tre gruppi indipendenti (a Delft, Vienna e Boulder) realizzarono contemporaneamente esperimenti "loophole-free", che chiusero simultaneamente tutte le principali scappatoie tecniche che avrebbero potuto permettere teorie locali realistiche di sopravvivere.

Il Teorema di Kochen-Specker e la Contestualità

Mentre il teorema di Bell riguarda sistemi bipartiti e la questione della località, esiste un altro risultato fondamentale che riguarda singoli sistemi quantistici e la questione del realismo: il teorema di Kochen-Specker, dimostrato nel 1967.

Questo teorema mostra che è impossibile assegnare valori definiti a tutte le osservabili quantistiche in modo consistente con le relazioni funzionali tra esse, anche senza invocare considerazioni di località. In altre parole, non può esistere un'assegnazione di valori alle osservabili che sia non-contestuale, cioè indipendente da quali altre osservabili vengono misurate simultaneamente.

Il teorema si basa sulla struttura algebrica degli operatori quantistici. Consideriamo un sistema di spin 1, il cui spazio di Hilbert è tridimensionale. Gli operatori di spin S_x, S_y, S_z soddisfano relazioni di commutazione $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k$ e relazioni funzionali come $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2\hbar^2$.

Kochen e Specker dimostrarono che non esiste un'assegnazione di valori $v(A)$ alle osservabili che soddisfi simultaneamente:

1. $v(I) = 1$ dove I è l'operatore identità
2. Se $[A, B] = 0$, allora $v(f(A, B)) = f(v(A), v(B))$ per ogni funzione f
3. $v(A^2) \geq 0$ per ogni osservabile A

La dimostrazione originale di Kochen-Specker è costruttiva: essi mostrarono un insieme finito di 117 osservabili per le quali non può esistere un'assegnazione consistente di valori. Successivamente, furono trovate dimostrazioni più semplici, la più elegante delle quali utilizza solo 18 vettori in dimensione 4.

Il teorema di Kochen-Specker implica che le proprietà quantistiche sono intrinsecamente contestuali: il valore misurato di un'osservabile dipende dal contesto di misura, cioè da quali altre osservabili compatibili vengono misurate simultaneamente. Questo è incompatibile con una visione realista classica in cui le proprietà esistono indipendentemente dal loro contesto di osservazione.

L'Entanglement Multipartito e gli Stati GHZ

L'entanglement non è limitato a sistemi di due particelle, ma può coinvolgere tre o più particelle in modi che portano a fenomeni ancora più sorprendenti. Gli stati multipartiti entangled mostrano correlazioni non classiche qualitativamente diverse da quelle degli stati bipartiti.

Un esempio paradigmatico è lo stato di Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) per tre particelle:

$|GHZ\rangle = (|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$

Questo stato mostra una forma di non-località ancora più drammatica di quella rivelata dalle disuguaglianze di Bell. Mentre le disuguaglianze di Bell rivelano contraddizioni statistiche tra teorie locali realistiche e meccanica quantistica, lo stato GHZ porta a contraddizioni logiche dirette.

Consideriamo misure degli operatori di spin σ_x e σ_y sulle tre particelle. Per lo stato GHZ, si può verificare che:

$\langle \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle = 1$ $\langle \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \rangle = -1$ $\langle \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \rangle = -1$ $\langle \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \rangle = -1$

In una teoria a variabili nascoste locale, ogni particella avrebbe valori definiti per le misure di σ_x e σ_y, che assumerebbero i valori ± 1. Il prodotto dei quattro valori medi sopra dovrebbe dare:

$(\sigma_x \cdot \sigma_x \cdot \sigma_x) \cdot (\sigma_y \cdot \sigma_y \cdot \sigma_x) \cdot (\sigma_y \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y) \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_y) = \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 = (+1)^2 \cdot (+1)^2 = +1$

Tuttavia, le predizioni quantistiche danno $1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$. Questa è una contraddizione logica diretta, non meramente statistica. Ogni singola esecuzione dell'esperimento, se interpretata in termini di valori preesistenti, porta a una contraddizione. Lo stato GHZ rivela quindi l'incompatibilità tra realismo locale e meccanica quantistica in modo ancora più netto delle disuguaglianze di Bell.

Un altro tipo importante di entanglement multipartito è rappresentato dagli stati W. Per tre particelle, lo stato W è:

$|W\rangle = (|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{3}$

Gli stati W e GHZ rappresentano due classi distinte di entanglement tripartito, non interconvertibili mediante operazioni locali e comunicazione classica. Gli stati W hanno la proprietà interessante di essere più robusti rispetto alla perdita di particelle: se una delle tre particelle viene tracciata via, le due rimanenti rimangono entangled. Al contrario, nello stato GHZ, la traccia su una particella lascia le altre due in uno stato separabile.

La Dinamica dell'Entanglement e la Decoerenza

L'entanglement non è una proprietà statica ma evolve dinamicamente nel tempo secondo le leggi della meccanica quantistica. La generazione, il mantenimento e la protezione dell'entanglement sono questioni centrali sia dal punto di vista fondamentale che applicativo.

In un sistema isolato, l'evoluzione temporale è governata dall'equazione di Schrödinger. Per un Hamiltoniano H, lo stato evolve secondo:

$$i\hbar \, d|\psi(t)\rangle/dt = H|\psi(t)\rangle$$

La soluzione formale è data dall'operatore di evoluzione temporale:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = e^{(-iHt/\hbar)}|\psi(0)\rangle$$

Se il sistema composto è isolato e l'Hamiltoniano conserva certe simmetrie, l'entanglement può essere preservato indefinitamente. Tuttavia, nella realtà fisica, i sistemi quantistici non sono mai perfettamente isolati ma interagiscono inevitabilmente con l'ambiente circostante.

L'interazione con l'ambiente porta al fenomeno della decoerenza, che tende a distruggere l'entanglement e le sovrapposizioni quantistiche, facendo emergere un comportamento apparentemente classico. La decoerenza è descritta matematicamente attraverso il formalismo delle mappe completamente positive e trace-preserving (CPTP) applicate alla matrice densità del sistema.

Per comprendere la decoerenza, consideriamo un sistema S accoppiato a un ambiente E. Lo stato totale iniziale può essere scritto come $|\psi_S\rangle \otimes |0_E\rangle$, dove $|0_E\rangle$ è lo stato iniziale dell'ambiente. L'interazione sistema-ambiente porta a un'evoluzione entangled:

$$U(t)(|\psi_S\rangle \otimes |0_E\rangle) = \Sigma_i \, c_i(t)|i_S\rangle \otimes |\varepsilon_i(t)\rangle$$

dove $|i_S\rangle$ sono stati del sistema e $|\varepsilon_i(t)\rangle$ sono corrispondenti stati dell'ambiente. Se gli stati ambientali diventano approssimativamente ortogonali, $\langle\varepsilon_i|\varepsilon_j\rangle \approx \delta_{ij}$, allora la matrice densità ridotta del sistema diventa:

$$\rho_S(t) = \Sigma_i \, |c_i(t)|^2 \, |i_S\rangle\langle i_S|$$

che è una miscela statistica classica piuttosto che una sovrapposizione quantistica coerente. Gli elementi off-diagonal della matrice densità, che rappresentano la coerenza quantistica, decadono esponenzialmente con una scala temporale caratteristica chiamata tempo di decoerenza τ_{dec}.

Il tempo di decoerenza dipende criticamente dalla natura del sistema e dell'accoppiamento con l'ambiente. Per sistemi macroscopici a temperatura ambiente, τ_{dec} può essere estremamente breve, dell'ordine di $10^{(-20)}$ secondi, spiegando perché non osserviamo sovrapposizioni quantistiche di oggetti macroscopici. Per sistemi microscopici opportunamente isolati, come ioni intrappolati o fotoni nel vuoto, τ_{dec} può essere molto più lungo, dell'ordine di secondi o anche ore.

La decoerenza è particolarmente devastante per l'entanglement. Mentre uno stato entangled puro rappresenta correlazioni quantistiche perfette, la decoerenza trasforma rapidamente questi stati puri in miscele classiche di stati separabili. Il tasso di perdita dell'entanglement è tipicamente più rapido del tasso di decoerenza degli stati individuali, rendendo l'entanglement una risorsa fragile e preziosa.

La Purificazione dell'Entanglement e la Distillazione

Data la fragilità dell'entanglement di fronte alla decoerenza, è cruciale sviluppare tecniche per purificare e distillare entanglement da stati parzialmente decoerti. Questo è essenziale per applicazioni pratiche come la crittografia quantistica e il calcolo quantistico distribuito.

Il protocollo di purificazione dell'entanglement, introdotto da Bennett, Brassard, Popescu, Schumacher, Smolin e Wootters nel 1996, permette a due parti (convenzionalmente chiamate Alice e Bob) di distillare un numero minore di coppie di particelle in stati entangled di alta qualità partendo da un numero maggiore di coppie in stati entangled di bassa qualità.

Il protocollo funziona nel seguente modo. Supponiamo che Alice e Bob condividano molte coppie di particelle nello stesso stato misto ρ che è vicino ma non identico a uno stato di Bell puro. Essi applicano operazioni locali (operazioni quantistiche sulle loro particelle) e comunicano classicamente (scambiandosi informazione attraverso canali classici) per selezionare e manipolare le loro coppie.

Un protocollo specifico, noto come protocollo BBPSSW, procede come segue. Alice e Bob prendono due coppie con matrice densità ρ. Alice esegue una porta CNOT (controlled-NOT) tra le sue due particelle, usando la prima come controllo e la seconda come target. Bob fa lo stesso con le sue particelle. Poi entrambi misurano le loro seconde particelle lungo l'asse z. Se ottengono lo stesso risultato, mantengono la prima coppia; altrimenti la scartano.

Questo protocollo aumenta la fedeltà dell'entanglement, definita come $F = \langle \Psi^- | \rho | \Psi^- \rangle$, ossia la sovrapposizione tra lo stato ρ e lo stato di singoletto ideale. Iterando il protocollo, Alice e Bob possono distillare coppie con fedeltà arbitrariamente vicina a 1, al costo di un numero decrescente di coppie sopravvissute.

Tuttavia, non tutti gli stati entangled possono essere purificati. Esiste una distinzione fondamentale tra stati distillabili e stati bound entangled. Gli stati bound entangled sono stati che possiedono entanglement genuino (non sono separabili) ma da cui non è possibile distillare stati di Bell puri mediante operazioni locali e comunicazione classica. Questi stati rappresentano una forma "congelata" di entanglement che non può essere utilizzata per applicazioni come il teletrasporto quantistico.

Il Teletrasporto Quantistico

Una delle applicazioni più spettacolari dell'entanglement è il teletrasporto quantistico, proposto da Bennett, Brassard, Crépeau, Jozsa, Peres e Wootters nel 1993 e realizzato sperimentalmente per la prima volta da Zeilinger e collaboratori nel 1997.

Il teletrasporto quantistico permette di trasferire lo stato quantistico di una particella a un'altra particella distante, senza che lo stato attraversi fisicamente lo spazio intermedio e senza che il mittente conosca lo stato che sta teletrasportando. Questo è possibile grazie all'entanglement preesistente tra le due località e alla comunicazione classica.

Il protocollo funziona come segue. Alice possiede una particella A in uno stato quantistico sconosciuto $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ che vuole teletrasportare a Bob. Alice e Bob condividono

preventivamente una coppia di particelle BC nello stato di Bell $|\Phi^+\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$, con la particella B in possesso di Alice e la particella C in possesso di Bob.

Lo stato iniziale totale del sistema a tre particelle è:

$|\psi\rangle_A \otimes |\Phi^+\rangle_{BC} = (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)_A \otimes (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)_{BC}/\sqrt{2}$

Questo può essere riscritto nella base degli stati di Bell per le particelle AB:

$|\psi\rangle|\Phi^+\rangle = 1/2[|\Phi^+\rangle_{AB}(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)_C + |\Phi^-\rangle_{AB}(\alpha|\uparrow\rangle - \beta|\downarrow\rangle)_C + |\Psi^+\rangle_{AB}(\alpha|\downarrow\rangle + \beta|\uparrow\rangle)_C + |\Psi^-\rangle_{AB}(\alpha|\downarrow\rangle - \beta|\uparrow\rangle)_C]$

Alice esegue ora una misura di Bell sulle sue due particelle A e B. Questa misura proietta il sistema in uno dei quattro stati di Bell per AB, con probabilità 1/4 ciascuno, e collassa la particella C di Bob in uno stato correlato.

Se Alice ottiene $|\Phi^+\rangle_{AB}$, lo stato di C diventa esattamente $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$, che è lo stato originale che Alice voleva teletrasportare. Se ottiene uno degli altri tre risultati, lo stato di C è una versione trasformata dello stato originale (con un flip di spin o un cambio di fase).

Alice comunica quindi il risultato della sua misura a Bob attraverso un canale classico (due bit di informazione classica). Bob, basandosi su questa informazione, applica la trasformazione unitaria appropriata alla sua particella C per ottenere esattamente lo stato originale $|\psi\rangle$.

È cruciale notare che il teletrasporto quantistico non viola il principio di relatività. L'informazione quantistica non viene trasferita istantaneamente; Bob può ricostruire lo stato originale solo dopo aver ricevuto la comunicazione classica da Alice, che viaggia al massimo alla velocità della luce. Inoltre, il teorema di no-cloning garantisce che lo stato originale sulla particella A viene distrutto dalla misura di Bell, quindi non c'è duplicazione dell'informazione quantistica.

Il teletrasporto quantistico è stato realizzato con successo in vari sistemi fisici: fotoni, ioni intrappolati, atomi, e più recentemente con sistemi superconduttori e stati di spin nucleare. Nel 2017, un team cinese guidato da Jian-Wei Pan ha dimostrato il teletrasporto quantistico tra la Terra e un satellite a 1400 km di distanza, aprendo la strada alle reti quantistiche globali.

La Crittografia Quantistica e il Protocollo BB84

L'entanglement e i principi della meccanica quantistica offrono possibilità rivoluzionarie per la comunicazione sicura. La crittografia quantistica, o più precisamente la distribuzione quantistica delle chiavi (Quantum Key Distribution, QKD), permette a due parti di condividere una chiave crittografica con sicurezza garantita dalle leggi della fisica piuttosto che da assunzioni sulla difficoltà computazionale.

Il protocollo più famoso è il BB84, proposto da Charles Bennett e Gilles Brassard nel 1984. Sebbene la versione originale non utilizzi esplicitamente l'entanglement, esiste una versione

basata sull'entanglement, nota come protocollo E91 proposto da Artur Ekert nel 1991, che illustra chiaramente il ruolo dell'entanglement nella sicurezza quantistica.

Nel protocollo E91, Alice e Bob condividono molte coppie di particelle entangled nello stato di singoletto $|\Psi^-\rangle$. Ciascuno misura le proprie particelle lungo direzioni scelte casualmente tra un insieme predefinito. Dopo le misure, Alice e Bob annunciano pubblicamente le direzioni di misura che hanno usato (ma non i risultati) e selezionano un sottoinsieme di casi in cui hanno usato la stessa direzione.

Per questo sottoinsieme, i risultati di Alice e Bob sono perfettamente anticorrelati a causa dell'entanglement. Questi risultati correlati costituiscono la chiave crittografica condivisa. Per verificare che nessun intercettatore (Eve) abbia interferito con le particelle entangled, Alice e Bob usano un altro sottoinsieme delle loro misure per testare una disuguaglianza di Bell.

La sicurezza deriva dal fatto che qualsiasi tentativo di Eve di intercettare e misurare le particelle disturberà inevitabilmente l'entanglement, riducendo la violazione della disuguaglianza di Bell. Alice e Bob possono quindi rilevare la presenza di Eve confrontando il loro livello di violazione della disuguaglianza di Bell con il valore teorico atteso. Se la violazione è sufficientemente forte, possono essere sicuri che la loro comunicazione non è stata intercettata.

Matematicamente, la sicurezza della QKD è garantita dal principio di Heisenberg e dal teorema di no-cloning. Il teorema di no-cloning afferma che non è possibile creare una copia identica di uno stato quantistico sconosciuto. Formalmente, non esiste un'operazione unitaria U tale che:

$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$

per ogni stato $|\psi\rangle$. Questo significa che Eve non può semplicemente copiare lo stato delle particelle inviate da Alice a Bob senza disturbarle.

La QKD è stata implementata commercialmente e reti quantistiche sono state costruite in diverse nazioni. La rete quantistica cinese si estende per migliaia di chilometri e include collegamenti tra Pechino e Shanghai. Nel 2020, l'Unione Europea ha annunciato l'iniziativa EuroQCI (European Quantum Communication Infrastructure) per costruire una rete di comunicazione quantistica che copra l'intero continente.

Il Calcolo Quantistico e l'Entanglement come Risorsa

L'entanglement è una risorsa essenziale per il calcolo quantistico, conferendo ai computer quantistici il loro potenziale vantaggio rispetto ai computer classici. La potenza computazionale di un computer quantistico deriva dalla capacità di manipolare sovrapposizioni quantistiche e stati entangled.

Un computer quantistico opera su qubit, l'analogo quantistico dei bit classici. Mentre un bit classico è nello stato 0 oppure 1, un qubit può essere in una sovrapposizione $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Un sistema di n qubit può essere in una sovrapposizione di 2^n stati classici simultaneamente:

$|\Psi\rangle = \Sigma_{i=0}^{2^n-1} c_i|i\rangle$

dove |i⟩ rappresenta gli stati della base computazionale e Σ|c_i|² = 1. Questa capacità di rappresentare esponenzialmente molti stati classici è alla base del parallelismo quantistico.

Tuttavia, la mera sovrapposizione non è sufficiente per ottenere un vantaggio computazionale quantistico. Stati che sono prodotti tensoriali di stati di singoli qubit, anche se sono in sovrapposizioni, possono essere simulati efficientemente da computer classici. È l'entanglement che conferisce ai computer quantistici la loro vera potenza.

Consideriamo l'algoritmo di Shor per la fattorizzazione di interi, che fornisce un vantaggio esponenziale rispetto ai migliori algoritmi classici conosciuti. La fattorizzazione di un numero N richiede tempo polinomiale su un computer quantistico, circa O((log N)³), mentre i migliori algoritmi classici conosciuti richiedono tempo superpolinomiale (ma subexponenziale).

L'algoritmo di Shor utilizza la trasformata di Fourier quantistica (QFT), che genera stati altamente entangled. Per n qubit, la QFT è definita come:

|j⟩ → (1/√(2^n)) Σ_{k=0}^{2^n-1} e^(2πijk/2^n)|k⟩

L'implementazione efficiente della QFT richiede solo O(n²) porte quantistiche, a differenza della trasformata di Fourier classica che richiede O(n2^n) operazioni. Questa efficienza deriva dalla struttura entangled degli stati quantistici.

Un'altra manifestazione del ruolo cruciale dell'entanglement è nel contesto della separazione tra classi di complessità quantistiche e classiche. Il teorema di Gottesman-Knill afferma che circuiti quantistici che contengono solo un insieme limitato di porte (porte di Clifford: Hadamard, CNOT, e porta di fase S) e preparazione e misura nella base computazionale possono essere simulati efficientemente da un computer classico. Questi circuiti, sebbene creino entanglement, producono solo un tipo speciale di stati entangled chiamati stati stabilizzatori.

Per ottenere un vantaggio computazionale quantistico, è necessario andare oltre il gruppo di Clifford e utilizzare porte che creano stati entangled non-stabilizzatori. La porta T, definita come T|0⟩ = |0⟩ e T|1⟩ = e^(iπ/4)|1⟩, è sufficiente per questo scopo. L'insieme {Hadamard, CNOT, T} forma un insieme universale per il calcolo quantistico.

La quantità di entanglement in uno stato quantistico può essere usata come misura della sua "quanticità" e della difficoltà di simularlo classicamente. Stati con alto entanglement multipartito sono generalmente più difficili da simulare classicamente e sono necessari per algoritmi quantistici che offrono vantaggi computazionali significativi.

Le Misure di Entanglement e la Teoria dell'Informazione Quantistica

La quantificazione dell'entanglement è una questione centrale nella teoria dell'informazione quantistica. Per stati puri bipartiti, l'entropia di von Neumann della matrice densità ridotta fornisce una misura univoca, ma per stati misti e sistemi multipartiti, la situazione è molto più complessa.

Per uno stato misto bipartito ρ_AB, sono state proposte varie misure di entanglement, ciascuna con proprietà e interpretazioni diverse. Le misure principali includono:

L'entanglement di formazione E_F(ρ) è definito come il numero minimo di stati di Bell necessari per preparare lo stato ρ in media, usando solo operazioni locali e comunicazione classica (LOCC). Matematicamente:

$E_F(\rho) = \min_{\{\Sigma p_i=1\}} \Sigma_i p_i S(Tr_B|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$

dove il minimo è preso su tutte le decomposizioni di ρ in stati puri: $\rho = \Sigma_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

L'entanglement distillabile E_D(ρ) è il numero massimo di stati di Bell che possono essere estratti asintoticamente dallo stato ρ usando LOCC. Per stati puri, E_F = E_D = S(ρ_A), ma per stati misti generalmente E_D ≤ E_F, con disuguaglianza stretta per molti stati.

La negatività N(ρ) è una misura operazionale basata sul criterio di trasposizione parziale. L'operazione di trasposizione parziale su uno dei sottosistemi, ρ^(T_B), trasforma uno stato ρ applicando la trasposizione solo sul sottosistema B. Per stati separabili, ρ^(T_B) rimane una matrice densità valida (con autovalori non negativi). Per stati entangled, ρ^(T_B) può avere autovalori negativi. La negatività è definita come:

$N(\rho) = (||\rho^{(T_B)}||_1 - 1)/2$

dove $||A||_1 = Tr(\sqrt{(A\dagger A)})$ è la norma traccia.

La concorrenza C(ρ) è una misura particolarmente utile per sistemi di due qubit. Per uno stato puro |ψ⟩, è definita come:

$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\sigma_y \otimes \sigma_y|\psi^*\rangle|$

dove |ψ*⟩ è il complesso coniugato di |ψ⟩ nella base computazionale. Per stati misti, la concorrenza è definita attraverso una procedura di minimalizzazione più complessa. La concorrenza varia da 0 per stati separabili a 1 per stati massimamente entangled.

Queste misure soddisfano alcune proprietà desiderabili. Devono essere nulle per stati separabili, invarianti sotto operazioni unitarie locali, non aumentare sotto LOCC (monotonicità), e essere convesse (non aumentare per miscelazione statistica di stati).

Entanglement e Termodinamica Quantistica

L'intersezione tra entanglement e termodinamica ha recentemente attirato notevole attenzione, dando origine al campo della termodinamica quantistica. L'entanglement può essere visto come una risorsa termodinamica che può essere convertita in lavoro meccanico e viceversa.

Il secondo principio della termodinamica stabilisce che l'entropia di un sistema isolato non può diminuire. Nella meccanica quantistica, questo principio deve essere riconsiderato alla luce dell'entanglement. Un sistema quantistico puro ha entropia zero, ma se è entangled con un altro sistema, il suo stato ridotto è misto e ha entropia positiva.

Consideriamo un sistema quantistico S accoppiato a un bagno termico B a temperatura T. Il sistema totale S+B evolve unitariamente e mantiene quindi entropia costante se isolato dall'esterno. Tuttavia, l'entropia del sistema S può diminuire a spese di un aumento dell'entropia del bagno B. L'entanglement tra S e B gioca un ruolo cruciale in questo trasferimento di entropia.

La relazione tra entanglement e entropia è espressa dalla formula di Araki-Lieb:

$|S(\rho_A) - S(\rho_B)| \leq S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$

dove ρ_{AB} è lo stato del sistema composto e ρ_A, ρ_B sono le matrici densità ridotte. Per stati puri, $S(\rho_{AB}) = 0$, quindi $S(\rho_A) = S(\rho_B)$, riflettendo il fatto che l'entanglement è una proprietà simmetrica.

Nel contesto dei motori termici quantistici, l'entanglement può essere utilizzato come risorsa per estrarre lavoro. Un motore termico quantistico opera tra due bagni termici a temperature diverse, T_h (caldo) e T_c (freddo), e può potenzialmente superare l'efficienza di Carnot $\eta_C = 1 - T_c/T_h$ quando utilizza stati entangled come fluido di lavoro.

Tuttavia, questo apparente paradosso è risolto notando che la creazione dell'entanglement stesso richiede un investimento di lavoro o risorse. Quando si tiene conto del costo completo di preparazione degli stati entangled, il secondo principio della termodinamica è preservato.

Il teorema di Landauer stabilisce che cancellare informazione ha un costo energetico minimo di $k_B T \ln 2$ per bit cancellato, dove k_B è la costante di Boltzmann. Nella versione quantistica, il costo di cancellazione dipende dall'entanglement del sistema con l'ambiente. Stati altamente entangled richiedono più energia per essere cancellati rispetto a stati separabili.

L'Entanglement nei Sistemi a Molti Corpi

L'entanglement gioca un ruolo fondamentale nella fisica dei sistemi quantistici a molti corpi, determinando le proprietà delle fasi quantistiche della materia e delle transizioni tra di esse. Lo studio dell'entanglement in questi sistemi ha rivelato connessioni profonde tra la teoria dell'informazione quantistica e la fisica della materia condensata.

Per una catena unidimensionale di spin, consideriamo lo stato fondamentale di un Hamiltoniano H. L'entanglement tra una regione A della catena e il resto del sistema può essere caratterizzato dall'entropia di entanglement $S_A = -\mathrm{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A)$, dove ρ_A è la matrice densità ridotta della regione A.

Per sistemi unidimensionali critici (al punto di transizione di fase quantistica), l'entropia di entanglement scala logaritmicamente con la dimensione della regione:

$S_A \sim (c/3) \log_2(L_A)$

dove L_A è la lunghezza della regione A e c è la carica centrale della teoria di campo conforme che descrive il comportamento critico. Questa legge di scala logaritmica è una firma distintiva dei sistemi critici unidimensionali.

Al contrario, in fasi gapped (con un gap energetico tra lo stato fondamentale e gli stati eccitati), l'entropia di entanglement satura a un valore costante per regioni sufficientemente grandi, seguendo una legge dell'area:

$S_A \sim \alpha \cdot \partial A$

dove ∂A è l'area (o lunghezza, in 1D) del confine della regione A. Questa legge dell'area riflette il fatto che in fasi gapped, l'entanglement è localizzato vicino al confine della regione.

Gli stati con entanglement che segue la legge dell'area possono essere efficientemente rappresentati usando tensor networks, strutture matematiche che codificano lo stato quantistico in termini di tensori connessi. I Matrix Product States (MPS) per sistemi unidimensionali e i Projected Entangled Pair States (PEPS) per sistemi bidimensionali sono esempi di tensor networks ampiamente utilizzati.

Un MPS rappresenta uno stato di N spin come:

$|\psi\rangle = \Sigma_{i_1,...,i_N} Tr(A^{[i_1]} A^{[i_2]} ... A^{[i_N]})|i_1 i_2 ... i_N\rangle$

dove $A^{[i]}$ sono matrici D×D, con D chiamato dimensione del bond. Stati con entanglement limitato possono essere ben approssimati con valori relativamente piccoli di D, permettendo simulazioni numeriche efficienti.

L'Entanglement nei Buchi Neri e la Gravità Quantistica

Uno degli sviluppi più sorprendenti degli ultimi decenni è stata la realizzazione che l'entanglement gioca un ruolo centrale nella gravità quantistica e nella fisica dei buchi neri. Questo ha portato a nuove intuizioni sul paradosso dell'informazione dei buchi neri e sulla relazione tra gravità e informazione quantistica.

Il paradosso dell'informazione dei buchi neri, formulato da Hawking negli anni '70, deriva dal fatto che i buchi neri emettono radiazione termica (radiazione di Hawking) e quindi evaporano nel tempo. Se un buco nero formato dal collasso di materia in uno stato puro evapora completamente emettendo solo radiazione termica (uno stato misto), l'evoluzione complessiva sarebbe non-unitaria, violando i principi fondamentali della meccanica quantistica.

L'entanglement fornisce una chiave per risolvere questo paradosso. Quando una coppia di particelle virtuali è creata vicino all'orizzonte degli eventi, una particella può cadere nel buco nero mentre l'altra sfugge come radiazione di Hawking. Queste particelle sono inizialmente entangled. Nel corso dell'evaporazione, si accumula un entanglement massiccio tra l'interno del buco nero e la radiazione esterna.

Page ha calcolato che l'entropia di entanglement della radiazione di Hawking inizialmente cresce linearmente con il tempo, ma dopo l'emissione di circa metà della massa originale del buco nero (il "Page time"), l'entropia inizia a diminuire. Questa curva a forma di pagoda è nota come curva di Page e è stata confermata da calcoli più recenti usando tecniche di olografia e gravità quantistica.

La corrispondenza AdS/CFT (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory), proposta da Maldacena nel 1997, fornisce una connessione profonda tra teorie gravitazionali in uno spazio Anti-de Sitter e teorie di campo conformi quantistiche sul confine di quello spazio. In questo contesto, l'entanglement nella teoria di campo conforme è dualisticamente legato alla geometria dello spazio-tempo gravitazionale.

La formula di Ryu-Takayanagi esprime questa connessione in termini quantitativi. Per una regione A sul confine dello spazio AdS, l'entropia di entanglement è data da:

$S_A = (Area(\gamma_A))/(4G_N \hbar)$

dove γ_A è la superficie minimale nello spazio AdS che è ancorata al confine della regione A, G_N è la costante di Newton, e $\hbar$ è la costante di Planck ridotta. Questa formula straordinaria suggerisce che la geometria dello spazio-tempo emerge dall'entanglement quantistico.

Il motto "spazio-tempo = entanglement" riassume questa visione rivoluzionaria. Lo spazio-tempo stesso potrebbe non essere un'entità fondamentale, ma piuttosto una struttura emergente che deriva dall'entanglement di gradi di libertà quantistici più fondamentali. Questa prospettiva ha profonde implicazioni per la natura ultima della realtà fisica.

Entanglement e Causalità: Il Problema della Non-Località

La non-località manifestata dall'entanglement solleva questioni profonde sul concetto di causalità nella fisica. Le correlazioni non-locali tra particelle entangled sembrano violare l'intuizione che gli eventi causali non possono propagarsi più velocemente della luce. Tuttavia, un'analisi attenta rivela che queste correlazioni non permettono la trasmissione di informazione superluminale.

Consideriamo due osservatori, Alice e Bob, che condividono uno stato entangled. Quando Alice esegue una misura sulla sua particella, lo stato della particella di Bob cambia istantaneamente (nel senso della riduzione del vettore di stato). Questo sembra implicare un'influenza causale istantanea da Alice a Bob. Tuttavia, Bob non può rilevare questo cambiamento senza confrontare i suoi risultati con quelli di Alice.

Le statistiche delle misure di Bob, considerate isolatamente, sono descritte dalla sua matrice densità ridotta $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$. Questa matrice densità rimane invariata indipendentemente da quale misura Alice esegua sulla sua particella. Matematicamente, se Alice misura un'osservabile O_A, la matrice densità ridotta di Bob dopo la misura, mediata su tutti i possibili risultati di Alice, rimane:

$\rho'_B = \Sigma_i Tr_A(P_i^A \rho_{AB} P_i^A) = Tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B$

dove P_i^A sono i proiettori associati ai possibili risultati della misura di Alice. Questo risultato mostra che Bob non può determinare se Alice ha eseguito una misura o quale misura ha eseguito semplicemente guardando le sue statistiche locali.

Solo quando Alice e Bob confrontano i loro risultati attraverso un canale classico (che viaggia al massimo alla velocità della luce) possono verificare le correlazioni non-locali. In questo senso, l'entanglement non permette la comunicazione superluminale, preservando la struttura causale della relatività speciale.

Tuttavia, rimane una tensione concettuale. La meccanica quantistica non-relativistica assume uno spazio-tempo con una struttura di simultaneità assoluta, permettendo di parlare del "collasso istantaneo" del vettore di stato. Nella relatività, non esiste una nozione assoluta di simultaneità, e diversi osservatori in moto relativo disaggregheranno sull'ordine temporale di eventi spazialmente separati.

Questa tensione è risolta nella teoria quantistica dei campi relativistica, dove l'entanglement è trattato in modo covariante. Le correlazioni non-locali sono descritte in termini di funzioni di correlazione che rispettano la causalità relativistica: operatori associati a regioni spazialmente separate commutano, garantendo che misure in queste regioni non possano influenzarsi causalmente.

Riflessioni Filosofiche: Realismo, Località e la Natura della Realtà

L'entanglement e i teoremi associati (Bell, Kochen-Specker) hanno profonde implicazioni filosofiche che vanno al cuore delle questioni sulla natura della realtà fisica. La fisica classica incarnava una visione del mondo realista e locale: gli oggetti fisici possiedono proprietà definite indipendentemente dall'osservazione, e le interazioni tra oggetti sono mediate da influenze che si propagano continuamente attraverso lo spazio.

La meccanica quantistica sfida entrambi questi principi. Il teorema di Bell dimostra che non possono esistere teorie che siano simultaneamente realiste (nel senso che le proprietà hanno valori definiti indipendenti dalla misura) e locali (nel senso che influenze causali non possono propagarsi istantaneamente). Le verifiche sperimentali delle violazioni delle disuguaglianze di Bell confermano che almeno uno di questi principi deve essere abbandonato.

La maggior parte dei fisici, seguendo l'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica, sceglie di abbandonare il realismo ingenuo. Le proprietà quantistiche non sono attributi intrinseci degli oggetti ma emergono dall'atto di misurazione. Questa posizione, tuttavia, solleva la questione del ruolo dell'osservatore e del significato della "misurazione" nella teoria quantistica.

Il problema della misurazione quantistica può essere formulato così: la meccanica quantistica descrive l'evoluzione temporale dei sistemi isolati mediante l'equazione di Schrödinger, che è deterministica, lineare e unitaria. Questa evoluzione preserva le sovrapposizioni quantistiche. Tuttavia, quando eseguiamo una misura, osserviamo sempre risultati definiti, non sovrapposizioni. Come si passa dalla sovrapposizione quantistica al risultato classico definito?

La risposta standard, nella formulazione di von Neumann, invoca un processo di "riduzione" o "collasso" del vettore di stato che è distinto dall'evoluzione unitaria. Questo collasso è

non-lineare, stocastico e discontinuo. La teoria non specifica precisamente quando o come avviene questo collasso, portando all'ambiguità sulla distinzione tra "sistema quantistico" e "apparato di misura classico".

Diverse interpretazioni della meccanica quantistica offrono risposte diverse a questa questione. L'interpretazione di Copenaghen, nella sua formulazione più pragmatica, evita di dare una risposta ontologica definita, considerando la meccanica quantistica come una teoria predittiva piuttosto che descrittiva. L'interpretazione a molti mondi di Everett elimina il collasso del vettore di stato, sostenendo che tutte le possibilità permesse dalla meccanica quantistica si realizzano in rami diversi di una funzione d'onda universale. Le teorie del collasso oggettivo, come il modello GRW (Ghirardi-Rimini-Weber), modificano l'equazione di Schrödinger per includere termini stocastici che causano collassi spontanei.

L'entanglement è centrale in tutte queste interpretazioni. Nell'interpretazione di Copenaghen, l'entanglement tra il sistema e l'apparato di misura è ciò che conduce alla registrazione del risultato. Nell'interpretazione a molti mondi, l'entanglement tra il sistema, l'apparato e l'osservatore crea i rami multipli della funzione d'onda. Nelle teorie del collasso oggettivo, l'entanglement con molti gradi di libertà aumenta il tasso di collasso.

L'Entanglement e il Problema Mente-Corpo

Alcuni filosofi e fisici hanno speculato su possibili connessioni tra l'entanglement quantistico e la coscienza. Queste speculazioni sono altamente controverse e non sono accettate dalla comunità scientifica mainstream, ma meritano una menzione per la loro rilevanza filosofica.

Roger Penrose e Stuart Hameroff hanno proposto che la coscienza emerga da processi quantistici nei microtubuli neuronali, con il collasso della funzione d'onda che gioca un ruolo nella generazione dell'esperienza cosciente. Secondo questa teoria, chiamata "riduzione oggettiva orchestrata" (Orch-OR), la coscienza sarebbe intrinsecamente quantistica e l'entanglement tra i microtubuli potrebbe essere responsabile dell'unità dell'esperienza cosciente.

Questa proposta affronta critiche sostanziali. Il cervello è un ambiente caldo e umido dove i tempi di decoerenza sono estremamente brevi, dell'ordine di 10^(-13) secondi per elettroni e 10^(-20) secondi per oggetti delle dimensioni dei microtubuli. È altamente improbabile che stati quantistici coerenti possano persistere abbastanza a lungo per influenzare i processi neuronali, che avvengono su scale temporali di millisecondi.

Inoltre, non esiste evidenza empirica che il cervello utilizzi calcolo quantistico o che fenomeni quantistici siano necessari per spiegare la cognizione. Le reti neurali classiche sono sufficienti per modellare molti aspetti della cognizione, e non vi è bisogno di invocare la meccanica quantistica per spiegare fenomeni psicologici.

Tuttavia, la questione più profonda rimane: esiste una connessione tra la natura dell'osservazione nella meccanica quantistica e la natura dell'esperienza cosciente? Von Neumann suggerì che il collasso del vettore di stato potrebbe avvenire nell'interazione con la coscienza dell'osservatore. Wigner esplorò questa idea, proponendo che la coscienza giochi un ruolo causale nel collasso quantistico.

Queste idee sono generalmente respinte dai fisici contemporanei, che preferiscono interpretazioni della meccanica quantistica che non richiedono un ruolo speciale per la coscienza. La decoerenza ambientale spiega l'emergenza del comportamento classico senza invocare osservatori coscienti. Tuttavia, il problema difficile della coscienza (come l'esperienza soggettiva emerge da processi fisici) rimane irrisolto, e alcuni filosofi sostengono che la natura peculiare della misurazione quantistica potrebbe offrire indizi per affrontare questo problema.

Entanglement e Olismo Quantistico

L'entanglement manifesta una forma di olismo che sfida il riduzionismo metodologico della fisica classica. In un sistema classico composto, le proprietà del tutto sono determinate dalle proprietà delle parti e dalle loro relazioni spaziali. In un sistema quantistico entangled, il tutto possiede proprietà che non possono essere ridotte alle proprietà delle parti.

Consideriamo nuovamente lo stato di singoletto $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$. Questo stato ha spin totale zero, una proprietà ben definita del sistema composto. Tuttavia, nessuna delle due particelle individualmente ha uno spin definito. L'assegnazione di uno spin definito a una particella avviene solo nel contesto di una misura, e dipende da quale componente dello spin viene misurata.

Questo olismo quantistico è stato interpretato filosoficamente in vari modi. Alcuni vedono nell'entanglement una conferma di visioni olistiche della realtà, dove le relazioni sono ontologicamente primarie rispetto ai relata. In questa visione, le particelle non sono entità individuali ben definite che successivamente entrano in relazione, ma piuttosto emergono come aspetti particolarizzati di una realtà fondamentalmente relazionale.

Altri filosofi sottolineano che l'olismo quantistico è compatibile con una forma di sopravvenienza fisica: le proprietà del sistema composto sopravvengono sullo stato quantistico globale, anche se questo stato non può essere fattorizzato in stati delle parti. In questo senso, il riduzionismo ontologico (la tesi che tutto ciò che esiste è composto da entità fisiche fondamentali) può essere mantenuto, anche se il riduzionismo esplicativo (la tesi che le proprietà dei composti possono essere sempre spiegate in termini di proprietà delle parti) deve essere modificato.

L'entanglement solleva anche questioni sull'individualità e l'identità delle particelle quantistiche. In meccanica quantistica, particelle identiche (come due elettroni) sono indistinguibili in un senso più forte rispetto alle particelle classiche. I loro stati devono essere simmetrizzati (per bosoni) o antisimmetrizzati (per fermioni). Per particelle entangled, non ha senso chiedere "quale particella ha quale proprietà", suggerendo che le particelle quantistiche potrebbero non essere individui nel senso metafisico tradizionale.

Entanglement Temporale e Correlazioni Non-Classiche nel Tempo

Mentre l'entanglement è tipicamente discusso come correlazione non-classica tra sistemi spazialmente separati, esistono anche correlazioni non-classiche che si manifestano nel

tempo. Questi fenomeni sollevano ulteriori questioni filosofiche sulla natura della realtà temporale nella meccanica quantistica.

Le disuguaglianze di Leggett-Garg sono l'analogo temporale delle disuguaglianze di Bell. Mentre Bell considerò correlazioni tra misure eseguite su sistemi spazialmente separati nello stesso tempo, Leggett e Garg considerarono correlazioni tra misure eseguite sullo stesso sistema a tempi diversi.

Le disuguaglianze di Leggett-Garg testano l'ipotesi del macro-realismo, che comprende due assunzioni: (1) il sistema possiede sempre valori definiti per tutte le sue osservabili (realismo per tempo), e (2) le misure possono essere eseguite in modo non-invasivo. La meccanica quantistica viola queste disuguaglianze, indicando che almeno una delle due assunzioni deve essere falsa.

Un'altra manifestazione di correlazioni temporali non-classiche è il fenomeno dello swap entangled nel tempo. Se prepariamo due particelle in uno stato entangled, aspettiamo un certo tempo, e poi le sottoponiamo a un processo di swap quantistico con due altre particelle, possiamo trasferire l'entanglement alle nuove particelle anche se queste non hanno mai interagito direttamente con le originali. Questo può essere interpretato come entanglement che persiste "attraverso" il tempo.

Gli esperimenti di scelta ritardata quantistica, come quello proposto da Wheeler, mostrano che la scelta di quale tipo di misura eseguire su un sistema può apparentemente influenzare retroattivamente il comportamento del sistema nel passato. Nel famoso esperimento della doppia fenditura con scelta ritardata, decidere di misurare "quale percorso" o "interferenza" dopo che il fotone ha passato le fenditure sembra determinare se il fotone si sia comportato come particella o come onda mentre attraversava le fenditure.

Questi fenomeni non implicano causalità retrograda in senso stretto, ma piuttosto riflettono il fatto che nella meccanica quantistica, le proprietà del sistema non sono definite indipendentemente dal contesto di misura, che include anche misure future. Questo suggerisce una visione della realtà temporale più sottile di quella del senso comune, dove il passato, presente e futuro sono interconnessi in modi non-classici.

La Teoria delle Operazioni LOCC e la Convertibilità degli Stati

Un aspetto fondamentale della teoria dell'entanglement riguarda quali trasformazioni sono possibili utilizzando solo operazioni locali e comunicazione classica (LOCC). Questo è rilevante perché, in molte situazioni pratiche, le parti che condividono l'entanglement possono manipolare solo le loro particelle localmente e comunicare attraverso canali classici.

Non tutti gli stati entangled possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante LOCC. Per stati puri bipartiti, esiste un criterio preciso per la convertibilità: uno stato $|\Psi\rangle$ con coefficienti di Schmidt λ_i può essere convertito in uno stato $|\Phi\rangle$ con coefficienti di Schmidt μ_i mediante LOCC se e solo se i coefficienti λ_i "majorizzano" i coefficienti μ_i.

La relazione di maggiorizzazione richiede che, dopo aver ordinato entrambi gli insiemi di coefficienti in ordine decrescente, valga:

$\Sigma_{j=1}^k \lambda_j \geq \Sigma_{j=1}^k \mu_j$

per ogni k. Intuitivamente, questo significa che la distribuzione λ è "più distribuita" della distribuzione μ. La maggiorizzazione fornisce un ordine parziale sugli stati entangled: alcuni stati possono essere convertiti l'uno nell'altro, mentre altri non sono confrontabili.

Questo ordine parziale ha profonde implicazioni. Significa che l'entanglement non è una singola risorsa scalare, ma piuttosto una risorsa con una struttura più complessa. Due stati potrebbero avere la stessa quantità di entropia di entanglement ma essere incomparabili in termini di convertibilità LOCC.

Per stati misti, la situazione è ancora più complessa. La convertibilità mediante LOCC diventa un problema molto difficile, e non esiste un criterio semplice come la maggiorizzazione. Questo ha portato allo sviluppo di varie misure di entanglement, ciascuna delle quali cattura aspetti diversi della risorsa entanglement.

Il Fenomeno della Monogamia dell'Entanglement

Una proprietà distintiva dell'entanglement, che lo differenzia dalle correlazioni classiche, è la monogamia. Questo principio afferma che se due particelle A e B sono massimamente entangled, allora nessuna delle due può essere significativamente entangled con una terza particella C. L'entanglement è una risorsa "esclusiva" che non può essere arbitrariamente condivisa.

Matematicamente, la monogamia può essere espressa attraverso disuguaglianze. Per la concorrenza C, vale la disuguaglianza di Coffman-Kundu-Wootters:

$C^2_A(BC) \geq C^2_{AB} + C^2_{AC}$

dove $C_A(BC)$ è la concorrenza tra A e il sistema composto BC, mentre C_{AB} e C_{AC} sono le concorrenze tra A-B e A-C rispettivamente. Questa disuguaglianza mostra che l'entanglement totale della particella A con le altre due è limitato superiormente.

La monogamia ha conseguenze profonde per la struttura delle correlazioni nei sistemi quantistici. Significa che non possiamo avere una rete completamente connessa di particelle tutte massimamente entangled tra loro. La struttura delle correlazioni quantistiche è necessariamente gerarchica e limitata.

Questo contrasta nettamente con le correlazioni classiche, che non sono monogame. Posso condividere informazione classica identica con un numero arbitrario di persone senza limitazioni. Posso essere perfettamente correlato sia con B che con C classicamente. La monogamia è quindi una firma distintiva delle correlazioni quantistiche.

La monogamia ha anche implicazioni per la sicurezza della crittografia quantistica. Se Alice e Bob hanno stabilito un forte entanglement tra loro, la monogamia garantisce che un potenziale intercettatore Eve non può essere significativamente entangled con il loro

sistema. Questo fornisce una base fisica per la sicurezza della distribuzione quantistica delle chiavi.

Entanglement e Teoria dei Giochi Quantistici

L'entanglement ha trovato applicazioni sorprendenti nella teoria dei giochi, portando al campo dei giochi quantistici. In un gioco quantistico, i giocatori possono utilizzare strategie quantistiche, incluse strategie che coinvolgono stati entangled, potenzialmente modificando la struttura stessa del gioco.

Il gioco più famoso studiato in questo contesto è il dilemma del prigioniero quantistico, introdotto da Eisert, Wilkens e Lewenstein nel 1999. In questo gioco, i due giocatori condividono uno stato entangled iniziale, e le loro "mosse" consistono nell'applicare operazioni unitarie locali alle loro particelle. La misura finale dello stato determina i payoff.

Sorprendentemente, l'introduzione dell'entanglement può cambiare radicalmente la struttura degli equilibri del gioco. Nel dilemma del prigioniero classico, l'unico equilibrio di Nash è che entrambi i giocatori defezionino, portando a un risultato subottimale. Nel dilemma del prigioniero quantistico, esiste una strategia quantistica (spesso chiamata strategia "miracolosa" Q) che, se giocata da entrambi i giocatori, porta al risultato ottimale di Pareto (cooperazione mutua) come equilibrio di Nash.

Questo risultato ha generato grande interesse e dibattito. Alcuni ricercatori vedono nei giochi quantistici la possibilità di risolvere dilemmi sociali attraverso correlazioni quantistiche. Altri sono più scettici, notando che la formulazione precisa del gioco quantistico è cruciale e che cambiamenti apparentemente minori possono alterare drasticamente i risultati.

Al di là delle applicazioni specifiche, i giochi quantistici illustrano come l'entanglement possa alterare la struttura delle interazioni strategiche. Le correlazioni non-locali forniscono ai giocatori forme di coordinamento che non sono disponibili classicamente, modificando potenzialmente la logica strategica delle situazioni di interazione.

Entanglement nella Biologia Quantistica

Negli ultimi anni, è emersa la questione se l'entanglement possa giocare un ruolo funzionale nei sistemi biologici. Questa è un'area controversa e attivamente dibattuta, che si colloca all'intersezione tra fisica quantistica, chimica e biologia.

Il caso più studiato riguarda la fotosintesi. Gli esperimenti sugli anni 2000 hanno mostrato che il trasferimento di energia nei complessi di antenne fotosintetiche avviene con efficienza quasi perfetta e su scale temporali brevissime. Alcuni ricercatori hanno proposto che la coerenza quantistica e l'entanglement potrebbero giocare un ruolo in questo processo altamente efficiente.

L'idea è che l'eccitone (una quasi-particella formata da un elettrone e una lacuna legati) creato dall'assorbimento di un fotone possa esistere in una sovrapposizione quantistica su molteplici siti del complesso proteico. Questa sovrapposizione permetterebbe all'eccitone di

"esplorare" simultaneamente multipli percorsi verso il centro di reazione, scegliendo il percorso più efficiente. L'entanglement tra diversi gradi di libertà vibrazionali e l'eccitone potrebbe inoltre facilitare questo trasferimento.

Le evidenze sperimentali includono l'osservazione di battimenti quantistici negli spettri di assorbimento a basse temperature, che suggeriscono la persistenza di coerenza quantistica su scale temporali di centinaia di femtosecondi. Tuttavia, l'interpretazione di questi risultati è dibattuta. Temperature biologicamente rilevanti sono molto più alte delle temperature degli esperimenti iniziali, e non è chiaro se la coerenza quantistica possa sopravvivere in condizioni fisiologiche.

Altri fenomeni biologici proposti per coinvolgere effetti quantistici includono la magnetoricezione negli uccelli migratori (che potrebbe coinvolgere paia di radicali entangled in proteine chiamate criptocromi), la mutazione genetica (dove il tunneling quantistico di protoni nel DNA potrebbe causare tautomerizzazioni), e persino il senso dell'olfatto (dove potrebbero essere rilevanti effetti di tunneling inelastico).

È importante mantenere una prospettiva equilibrata su questi claim. Il fatto che un sistema biologico operi a temperature ambiente e in un ambiente acquoso rende estremamente difficile la sopravvivenza della coerenza quantistica. I tempi di decoerenza in tali ambienti sono tipicamente estremamente brevi. Inoltre, l'evoluzione ha avuto miliardi di anni per ottimizzare i processi biologici usando meccanismi classici, quindi non è necessario invocare la meccanica quantistica a meno che non ci siano evidenze chiare che i meccanismi classici sono insufficienti.

Detto questo, la biologia quantistica rimane un'area affascinante di ricerca che potrebbe rivelare nuovi modi in cui la natura sfrutta i principi quantistici, e potrebbe ispirare nuove tecnologie biomimetiche che utilizzano coerenza quantistica.

Entanglement Continuo e Stati Squeezed

Finora abbiamo principalmente discusso l'entanglement in sistemi a variabili discrete, come lo spin. Tuttavia, l'entanglement esiste anche in sistemi a variabili continue, come la posizione e l'impulso di particelle o i quadrature del campo elettromagnetico. L'entanglement continuo presenta caratteristiche matematiche e fisiche distintive.

Un esempio importante di entanglement continuo è fornito dagli stati squeezed bipartiti. Per due modi del campo elettromagnetico, possiamo definire gli operatori di quadratura:

$\hat{X}_j = (\hat{a}_j + \hat{a}\dagger_j)/\sqrt{2}$ $\hat{P}_j = (\hat{a}_j - \hat{a}\dagger_j)/(i\sqrt{2})$

dove $\hat{a}_j$ e $\hat{a}\dagger_j$ sono gli operatori di annichilazione e creazione per il modo j. Questi operatori soddisfano le relazioni di commutazione canoniche $[\hat{X}_j, \hat{P}_k] = i\delta_{jk}$.

Uno stato squeezed a due modi può essere generato applicando un operatore di squeezing bipartito a uno stato di vuoto:

$|\psi_{sq}\rangle = \hat{S}(r)|0,0\rangle$

dove Ŝ(r) = exp[r(â†_1â†_2 - â_1â_2)] è l'operatore di squeezing con parametro reale r. Lo stato risultante ha la proprietà che certe combinazioni di quadrature dei due modi sono correlate al di sotto del limite quantistico standard.

Esplicitamente, per lo stato squeezed a due modi:

ΔX̂_- = e^(-2r) ΔP̂_+ = e^(2r)

dove X̂_- = (X̂_1 - X̂_2)/√2 e P̂_+ = (P̂_1 + P̂_2)/√2. Mentre una quadratura ha incertezza ridotta (squeezed), la quadratura coniugata ha incertezza aumentata, in accordo con il principio di indeterminazione.

Gli stati squeezed bipartiti mostrano violazioni delle disuguaglianze di tipo Bell per variabili continue e possono essere utilizzati per migliorare la sensibilità di misure di precisione. I rivelatori di onde gravitazionali come LIGO utilizzano luce squeezed per ridurre il rumore quantistico e migliorare la sensibilità.

L'entanglement in sistemi a variabili continue può essere quantificato usando criteri come il criterio di Duan-Giedke-Cirac-Zoller (DGCZ) o il criterio di Simon. Questi criteri forniscono condizioni necessarie e sufficienti per la separabilità basate sulle matrici di covarianza delle quadrature.

Per stati gaussiani (stati la cui funzione Wigner è una gaussiana), l'intera struttura delle correlazioni è codificata nella matrice di covarianza γ_ij = ⟨{R̂_i, R̂_j}⟩/2 - ⟨R̂_i⟩⟨R̂_j⟩, dove R̂ = (X̂_1, P̂_1, X̂_2, P̂_2) è il vettore delle quadrature. Il criterio di separabilità di Peres-Horodecki può essere riformulato per stati gaussiani in termini di proprietà della matrice di covarianza dopo trasposizione parziale.

Testimoni di Entanglement e Rivelazione Sperimentale

La verifica sperimentale dell'entanglement è una questione non triviale. Mentre i test delle disuguaglianze di Bell forniscono evidenza dell'entanglement, esistono metodi più diretti basati sui testimoni di entanglement (entanglement witnesses).

Un testimone di entanglement è un'osservabile Ŵ (un operatore hermitiano) tale che:

Tr(Ŵρ) ≥ 0 per tutti gli stati separabili ρ_sep Tr(Ŵρ_ent) < 0 per almeno uno stato entangled ρ_ent

Se misuriamo un valore medio negativo per Ŵ, possiamo concludere con certezza che lo stato è entangled. I testimoni di entanglement forniscono condizioni sufficienti ma non necessarie per l'entanglement: l'assenza di un valore negativo per un particolare testimone non implica che lo stato sia separabile, poiché potrebbe essere rivelato da un testimone diverso.

La costruzione di testimoni ottimali per una data situazione sperimentale è un problema di ottimizzazione. Per ogni stato entangled ρ_ent, esiste sempre almeno un testimone che lo rileva. Geometricamente, i testimoni definiscono iperpiani nello spazio degli stati che separano gli stati entangled da quelli separabili.

Un esempio concreto di testimone per il rilevamento di stati di Bell è:

$\hat{W}_{Bell} = 1/2\, I - |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$

Questo testimone ha valore medio 0 per lo stato di singoletto $|\Psi^-\rangle$ e valore positivo per tutti gli stati separabili. In pratica, misure imperfette e rumore possono portare a valori debolmente negativi anche per stati separabili, quindi è necessaria un'analisi statistica attenta.

Un approccio alternativo è la tomografia dello stato quantistico, che cerca di ricostruire completamente la matrice densità ρ attraverso un insieme completo di misure. Per un sistema bipartito di due qubit, la matrice densità è 4×4 e ha 15 parametri reali indipendenti (dopo aver imposto la traccia unitaria). Questi possono essere determinati misurando valori medi di un set completo di 15 osservabili linearmente indipendenti.

Una volta ricostruita la matrice densità, si possono calcolare misure di entanglement come la concorrenza o la negatività. Tuttavia, la tomografia completa diventa rapidamente impraticabile per sistemi grandi: un sistema di n qubit richiede la determinazione di 4^n - 1 parametri. Per sistemi di molte particelle, sono necessari approcci più scalabili.

Il Ruolo dell'Entanglement nelle Transizioni di Fase Quantistiche

Le transizioni di fase quantistiche sono transizioni tra diversi stati fondamentali di un sistema quantistico a temperatura zero, guidate dalla variazione di un parametro nel'Hamiltoniano come un campo magnetico o un'intensità di accoppiamento. L'entanglement gioca un ruolo cruciale in queste transizioni.

Consideriamo il modello di Ising trasverso unidimensionale, un sistema di spin-1/2 su un reticolo lineare con Hamiltoniano:

$H = -J \Sigma_i \sigma^z_i \sigma^z_{i+1} - h \Sigma_i \sigma^x_i$

dove J è l'accoppiamento ferromagnetico tra spin vicini e h è l'intensità del campo trasverso. Questo modello mostra una transizione di fase quantistica al punto critico $h_c = J$.

Per $h << J$, lo stato fondamentale è ferromagnetico, con tutti gli spin allineati lungo l'asse z. Per $h >> J$, lo stato fondamentale è paramagnetico, con spin puntanti lungo l'asse x. Al punto critico $h = J$, il sistema mostra comportamento critico con correlazioni a lungo raggio e invarianza di scala.

L'entropia di entanglement mostra un comportamento caratteristico vicino alla transizione. Lontano dal punto critico, in una fase gapped, l'entropia di entanglement satura a un valore costante per grandi sottosistemi (legge dell'area). Al punto critico, invece, l'entropia diverge logaritmicamente:

$S_A \sim (c/3) \log(L_A) + const$

dove c è la carica centrale della teoria di campo conforme che descrive il comportamento critico. Questa divergenza logaritmica è una firma universale dei punti critici quantistici unidimensionali.

Le derivate dell'entropia di entanglement rispetto ai parametri del sistema mostrano picchi o discontinuità alle transizioni di fase, analogamente al comportamento delle derivate dell'energia libera nelle transizioni di fase termiche. Questo ha portato alla proposta di usare l'entanglement come "parametro d'ordine" per caratterizzare le transizioni di fase quantistiche.

In sistemi bidimensionali, la situazione è più ricca. La legge dell'area S_A ~ L in fasi gapped, dove L è la lunghezza del perimetro della regione A, acquisisce una correzione topologica nelle fasi topologicamente ordinate:

S_A = αL - γ + ...

dove γ è l'entropia topologica, una costante che dipende solo dalla classe topologica della fase e non dalla forma specifica della regione A. L'entropia topologica fornisce una caratterizzazione robusta delle fasi topologiche e è legata alla degenerazione dello stato fondamentale su topologie non triviali.

Entanglement e Correzione degli Errori Quantistici

La correzione degli errori quantistici è essenziale per la realizzazione pratica di computer quantistici. La decoerenza e gli errori operazionali inevitabilmente degradano l'informazione quantistica, ma opportune strutture di entanglement possono proteggere questa informazione.

Il codice più semplice è il codice a tre qubit per la correzione di bit-flip. Un qubit logico |ψ⟩_L = α|0⟩_L + β|1⟩_L viene codificato in tre qubit fisici come:

|0⟩_L = |000⟩ |1⟩_L = |111⟩

Quindi |ψ⟩_L = α|000⟩ + β|111⟩. Questo è uno stato entangled altamente non-classico. Se uno dei tre qubit subisce un bit-flip (σ^x), possiamo rilevare quale qubit è stato alterato misurando i prodotti σ^z_1σ^z_2 e σ^z_2σ^z_3 (chiamati sindrome dell'errore) e correggere l'errore.

Un codice più potente è il codice di Shor a nove qubit, che può correggere errori arbitrari su un singolo qubit. Combina protezione contro bit-flip e phase-flip codificando:

|0⟩_L = (|000⟩ + |111⟩)(|000⟩ + |111⟩)(|000⟩ + |111⟩)/2√2 |1⟩_L = (|000⟩ - |111⟩)(|000⟩ - |111⟩)(|000⟩ - |111⟩)/2√2

Questi stati mostrano un entanglement multipartito complesso che fornisce ridondanza contro errori.

I codici stabilizzatori forniscono un framework generale per la correzione degli errori quantistici. Uno stato di codice è definito come l'autospazio comune di un insieme di

operatori che commutano, chiamati generatori dello stabilizzatore. Per esempio, il codice a tre qubit ha stabilizzatori S_1 = σ^z_1σ^z_2 e S_2 = σ^z_2σ^z_3.

Il teorema di Knill-Laflamme fornisce le condizioni necessarie e sufficienti per un codice quantistico che corregge un insieme specifico di errori. Essenzialmente, il codice deve essere tale che gli stati di codice dopo errori diversi siano ortogonali o distinguibili.

Il codice superficiale, proposto da Kitaev, è particolarmente promettente per implementazioni pratiche. Dispone i qubit su un reticolo bidimensionale e definisce stabilizzatori associati ai vertici (prodotti di σ^z) e alle facce (prodotti di σ^x) del reticolo. Il codice superficiale ha una soglia di errore relativamente alta (circa 1%) e richiede solo interazioni tra qubit vicini, rendendolo architetturalmente favorevole.

L'entanglement nei codici di correzione degli errori serve a "delocalizzare" l'informazione quantistica su molti qubit fisici in modo tale che la perdita o l'errore di pochi qubit non distrugga l'informazione logica. Questo è un esempio di come l'entanglement possa essere una risorsa protettiva piuttosto che semplicemente una proprietà fragile da preservare.

Entanglement Distribuito e Reti Quantistiche

La visione di un'internet quantistica - una rete di nodi quantistici connessi da canali che distribuiscono entanglement - sta diventando sempre più concreta. L'entanglement distribuito su lunghe distanze è la risorsa fondamentale per applicazioni come la crittografia quantistica a lungo raggio, il calcolo quantistico distribuito e la metrologia di precisione distribuita.

La distribuzione di entanglement su lunghe distanze affronta sfide significative. I fotoni che viaggiano attraverso fibra ottica sono attenuati esponenzialmente: dopo circa 20 km in fibra standard, metà dei fotoni sono persi. Questo limita drasticamente la distanza su cui l'entanglement può essere distribuito direttamente.

La soluzione è il quantum repeater, un dispositivo che estende il raggio della distribuzione di entanglement. Il concetto base è dividere la distanza totale in segmenti più corti, stabilire entanglement su ciascun segmento, e poi "cucire insieme" questi segmenti usando entanglement swapping.

L'entanglement swapping funziona così: supponiamo che Alice condivida entanglement con un nodo intermedio Charlie (particelle A-C entangled), e Charlie condivida entanglement con Bob (particelle C'-B entangled). Se Charlie esegue una misura di Bell sulle sue due particelle C e C', allora le particelle remote A e B diventano entangled, anche se non hanno mai interatto direttamente.

Matematicamente, se lo stato iniziale è:

$|\Psi^-\rangle_{AC} \otimes |\Psi^-\rangle_{C'B} = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)_{AC}/\sqrt{2} \otimes (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)_{C'B}/\sqrt{2}$

dopo la misura di Bell di Charlie su CC', lo stato di AB dipende dal risultato della misura. Se Charlie ottiene $|\Psi^-\rangle_{CC'}$, allora AB finisce nello stato $|\Psi^-\rangle_{AB}$. Per altri risultati della misura

di Bell, AB finisce in uno degli altri stati di Bell, che possono essere trasformati in $|\Psi^-\rangle_{AB}$ applicando operazioni unitarie locali su A o B.

Un quantum repeater completo include anche purificazione dell'entanglement per migliorare la fedeltà, e memorie quantistiche per immagazzinare l'entanglement mentre si attendono operazioni su altri segmenti. Le memorie quantistiche devono mantenere la coerenza quantistica per tempi sufficientemente lunghi, tipicamente secondi o più.

Vari sistemi fisici sono candidati per nodi di reti quantistiche: ioni intrappolati (con tempi di coerenza lunghi ma velocità di porte limitate), atomi neutri (con buona scalabilità), centri di colore NV in diamante (che operano a temperatura ambiente), e sistemi superconduttori (con velocità di operazione elevate ma richiedenti temperature criogeniche).

Nel 2017, la Cina ha dimostrato la distribuzione di entanglement tra stazioni terrestri separate da 1200 km usando il satellite Micius come nodo intermedio. Questo ha dimostrato la fattibilità della distribuzione di entanglement su scala globale usando collegamenti satellite-terra.

Entanglement e Informazione di Fisher Quantistica

Nella teoria dell'informazione quantistica, l'informazione di Fisher quantistica (QFI) fornisce una misura di quanto efficacemente un parametro sconosciuto può essere stimato da misure su uno stato quantistico. L'entanglement può migliorare drammaticamente la precisione delle stime parametriche.

Consideriamo uno stato quantistico $\rho(\theta)$ che dipende da un parametro sconosciuto θ che vogliamo stimare. L'informazione di Fisher classica $F(\theta)$ quantifica la precisione della stima: la varianza di qualsiasi stimatore non distorto è limitata dal bound di Cramér-Rao:

$$\mathrm{Var}(\theta) \geq 1/(NF(\theta))$$

dove N è il numero di misure indipendenti. L'informazione di Fisher quantistica $F_Q(\theta)$ è una quantità intrinseca allo stato $\rho(\theta)$ che non dipende dalla scelta della misura, e soddisfa $F(\theta) \leq F_Q(\theta)$ per qualsiasi strategia di misura.

Per uno stato puro $|\psi(\theta)\rangle$, la QFI ha una forma particolarmente semplice:

$$F_Q(\theta) = 4[\langle \partial_\theta \psi | \partial_\theta \psi \rangle - |\langle \psi | \partial_\theta \psi \rangle|^2]$$

Gli stati entangled possono fornire QFI molto più alta degli stati separabili, portando a stime parametriche più precise. Questo è il principio alla base della metrologia quantistica potenziata dall'entanglement.

Consideriamo N particelle di spin-1/2 usate per stimare un campo magnetico B. Se le particelle sono in uno stato separabile (prodotto), la QFI scala come $F_Q \sim N$ (scaling del limite quantistico standard o shot-noise). Se invece le particelle sono in uno stato massimamente entangled tipo GHZ:

$$|GHZ\rangle = (|\uparrow\uparrow...\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow...\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$$

allora la QFI scala come F_Q ~ N², raggiungendo il limite di Heisenberg. Questo guadagno quadratico nella precisione della stima rappresenta un vantaggio quantitativo sostanziale per applicazioni di metrologia.

Note Tecniche Supplementari sulla Formalizzazione Matematica

Per completezza tecnica, è utile fornire alcuni dettagli matematici aggiuntivi sulla struttura formale dell'entanglement. La teoria matematica degli stati quantistici si basa sulla struttura degli spazi di Hilbert e degli operatori lineari su questi spazi.

Uno spazio di Hilbert H è uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto interno $\langle\cdot|\cdot\rangle$ che è completo rispetto alla norma indotta $||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$. Gli stati quantistici puri sono rappresentati da vettori unitari (o raggi) in H, mentre gli stati misti sono rappresentati da operatori densità ρ, che sono operatori lineari positivi semidefiniti con traccia unitaria.

Per un sistema bipartito con spazi di Hilbert H_A e H_B, lo spazio totale è il prodotto tensoriale H_AB = H_A ⊗ H_B. La dimensione di questo spazio è il prodotto delle dimensioni: dim(H_AB) = dim(H_A) × dim(H_B). Per due qubit, abbiamo uno spazio quadridimensionale.

Il prodotto tensoriale di operatori è definito da $(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = A|\psi\rangle \otimes B|\varphi\rangle$ e esteso per linearità. L'operazione di traccia parziale Tr_B: L(H_AB) → L(H_A) è definita dalla proprietà:

$$\mathrm{Tr}(A\,\mathrm{Tr}_B(\rho)) = \mathrm{Tr}((A \otimes I_B)\rho)$$

per ogni operatore A su H_A. Esplicitamente, in una base prodotto $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}$, abbiamo:

$$\mathrm{Tr}_B(\rho) = \Sigma_j (I_A \otimes \langle j|_B)\, \rho\, (I_A \otimes |j\rangle_B)$$

La decomposizione di Schmidt, menzionata precedentemente, può essere derivata applicando la decomposizione ai valori singolari all'operatore $\sqrt{\rho_A}$, dove $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$. I coefficienti di Schmidt sono le radici quadrate degli autovalori di ρ_A (o equivalentemente di ρ_B).

Per caratterizzare la separabilità, utilizziamo il fatto che gli stati separabili formano un insieme convesso. Uno stato misto ρ è separabile se e solo se può essere scritto come:

$$\rho = \Sigma_i\, p_i\, \rho^A_i \otimes \rho^B_i$$

dove $p_i \geq 0$, $\Sigma_i\, p_i = 1$, e ρ^A_i, ρ^B_i sono stati (non necessariamente puri) dei sottosistemi. L'insieme degli stati separabili è la chiusura convessa degli stati prodotto puri.

Il criterio di Peres-Horodecki fornisce una condizione necessaria (e per sistemi 2×2 e 2×3, anche sufficiente) per la separabilità basata sulla trasposizione parziale. Definiamo l'operazione di trasposizione parziale T_B rispetto al sottosistema B come:

$$(T_B\,\rho)_{ijkl} = \rho_{ijlk}$$

dove gli indici i,k si riferiscono al sottosistema A e j,l al sottosistema B. Uno stato è separabile solo se la sua trasposizione parziale ρ^(T_B) è ancora un operatore positivo semidefinito (ha tutti autovalori non-negativi).

Per stati entangled, ρ^(T_B) può avere autovalori negativi. La somma degli autovalori negativi (in valore assoluto) definisce la negatività, una misura di entanglement. Matematicamente:

$N(\rho) = \Sigma_{\lambda_i<0} |\lambda_i|$

dove λ_i sono gli autovalori di ρ^(T_B).

Approfondimenti sulla Struttura Matematica dell'Entanglement

Per comprendere più profondamente la struttura matematica dell'entanglement, è utile esaminare la decomposizione di Schmidt, un risultato fondamentale che fornisce una forma canonica per gli stati puri bipartiti. Per ogni stato puro $|\Psi\rangle$ di un sistema bipartito AB, esiste sempre una base ortonormale $\{|i_A\rangle\}$ per il sottosistema A e una base ortonormale $\{|i_B\rangle\}$ per il sottosistema B tali che:

$|\Psi\rangle = \Sigma_i \sqrt{\lambda_i} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$

dove i coefficienti λ_i sono non-negativi, soddisfano $\Sigma_i \lambda_i = 1$, e sono chiamati coefficienti di Schmidt. Il numero di coefficienti di Schmidt non nulli è chiamato rango di Schmidt dello stato e fornisce una misura della complessità dell'entanglement.

Per uno stato separabile, il rango di Schmidt è 1, poiché lo stato può essere scritto come un singolo prodotto tensoriale. Per stati entangled, il rango di Schmidt è almeno 2. Gli stati massimamente entangled hanno tutti i coefficienti di Schmidt uguali. Per esempio, lo stato di singoletto $|\Psi^-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ ha due coefficienti di Schmidt entrambi uguali a 1/2.

I coefficienti di Schmidt sono strettamente legati agli autovalori della matrice densità ridotta. Se $|\Psi\rangle$ ha la decomposizione di Schmidt sopra, allora:

$\rho_A = Tr_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \Sigma_i \lambda_i |i_A\rangle\langle i_A|$

Gli autovalori di ρ_A sono esattamente i coefficienti di Schmidt λ_i. L'entropia di von Neumann può quindi essere scritta direttamente in termini dei coefficienti di Schmidt:

$S(\rho_A) = -\Sigma_i \lambda_i \log_2(\lambda_i)$

Questa formula mostra che l'entropia di entanglement dipende solo dalla distribuzione dei coefficienti di Schmidt, non dalla loro fase o dai dettagli degli stati di base. Due stati con la stessa distribuzione di coefficienti di Schmidt hanno lo stesso grado di entanglement, anche se possono essere fisicamente molto diversi.

Approfondimento sulle Trasformazioni LOCC

Le operazioni locali e comunicazione classica (LOCC) formano una classe importante di trasformazioni che preservano certe proprietà dell'entanglement. Una trasformazione LOCC generale può essere descritta come segue.

Alice esegue una misura generalizzata (descritta da operatori di Kraus {M^A_i}) sulla sua parte del sistema, ottenendo risultato i con probabilità p_i = Tr[(M^A_i ⊗ I_B)ρ(M^A†_i ⊗ I_B)]. Lo stato dopo la misura, condizionato al risultato i, è:

ρ_i = (M^A_i ⊗ I_B)ρ(M^A†_i ⊗ I_B) / p_i

Alice comunica classicamente il risultato i a Bob, che esegue quindi una trasformazione (possibilmente dipendente da i) sulla sua parte, descritta da operatori {N^B_{i,j}}. Il processo può essere iterato con comunicazione bidirezionale.

Una classe importante di operazioni LOCC sono le operazioni separabili, che possono essere scritte come:

ε(ρ) = Σ_k (A_k ⊗ B_k) ρ (A†_k ⊗ B†_k)

dove Σ_k A†_k A_k ⊗ B†_k B_k = I_A ⊗ I_B. Tuttavia, non tutte le operazioni LOCC possono essere scritte in questa forma; LOCC forma un insieme più ristretto delle operazioni separabili.

La teoria delle trasformazioni di stati entangled sotto LOCC è intimamente connessa alla teoria della maggiorizzazione. Per vettori di probabilità λ = (λ_1,...,λ_n) e μ = (μ_1,...,μ_n) ordinati in ordine decrescente, diciamo che λ majorizza μ (scritto λ ≻ μ) se:

Σ^k_{i=1} λ_i ≥ Σ^k_{i=1} μ_i per ogni k = 1,...,n-1

e Σ^n_{i=1} λ_i = Σ^n_{i=1} μ_i

Il teorema di Nielsen afferma che per stati puri bipartiti |ψ⟩ e |φ⟩ con coefficienti di Schmidt λ e μ rispettivamente, |ψ⟩ può essere trasformato in |φ⟩ mediante LOCC con probabilità 1 se e solo se λ ≻ μ.

Entanglement Bound e Stati PPT Entangled

Gli stati bound entangled, introdotti precedentemente, rappresentano una classe affascinante di stati che possiedono entanglement genuino ma da cui non può essere distillato entanglement utilizzabile. Questi stati hanno trasposizione parziale positiva (PPT) ma sono comunque entangled.

L'esistenza di stati bound entangled è stata inizialmente dimostrata attraverso costruzioni esplicite. Un esempio famoso è lo stato di Horodecki per sistemi 3×3:

ρ_Horodecki = 1/(7a+1) (|ψ⟩⟨ψ| + a Σ^2_{i,j=0} |ii⟩⟨jj|)

dove $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}\ (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$ e il parametro a è scelto opportunamente (ad esempio a = 1/7). Questo stato è PPT (quindi indistrillabile) ma viola criteri di separabilità basati su testimoni di entanglement, dimostrando che è entangled.

L'esistenza di stati bound entangled mostra che l'entanglement non è una risorsa monolitica ma ha una struttura più complessa. Alcuni stati possiedono "entanglement inutilizzabile" per teletrasporto o altre applicazioni che richiedono distillazione. Questo ha portato a distinzioni tra entanglement "libero" (distillabile) e entanglement "bound" (non distillabile).

Recentemente, è stato scoperto che gli stati bound entangled possono comunque avere utilità in alcuni protocolli quantistici. Per esempio, possono essere utilizzati come catalizzatori per trasformazioni LOCC che altrimenti non sarebbero possibili, o per attivare entanglement distillabile quando combinati con altri stati.

Aspetti Avanzati della Metrologia Quantistica

La metrologia quantistica sfrutta l'entanglement per superare i limiti classici di precisione nelle stime parametriche. Il limite quantistico standard (SQL), derivante dal rumore di shot nelle misure indipendenti, può essere superato utilizzando stati entangled, raggiungendo idealmente il limite di Heisenberg.

Per un parametro θ da stimare, l'informazione di Fisher quantistica $F_Q(\theta)$ definisce il limite quantistico di Cramér-Rao:

$Var(\theta) \geq 1/(N_{measurements} F_Q(\theta))$

Per N particelle non correlate, $F_Q \sim N$. Per particelle in uno stato massimamente entangled tipo GHZ, $F_Q \sim N^2$, fornendo un guadagno quadratico nella precisione.

Tuttavia, questo guadagno è estremamente fragile. In presenza di decoerenza, anche debole, il vantaggio quantistico è rapidamente perso. Se ciascuna particella subisce decoerenza con tasso γ, la QFI decade come:

$F_Q(t) \sim N^2 e^{(-\gamma N t)}$

per stati GHZ, mentre stati separabili danno:

$F_Q(t) \sim N e^{(-\gamma t)}$

Per tempi $t > 1/(\gamma N)$, gli stati entangled diventano effettivamente inferiori agli stati separabili! Questo fenomeno è noto come "sensibilità super-classica al rumore" degli stati entangled.

Stati entangled più robusti, come stati squeezed di spin, offrono un compromesso: scaling della precisione come N^α con α tra 1/2 e 1, ma con maggiore robustezza al rumore. La scelta ottimale dello stato entangled dipende dal livello di rumore previsto e dal regime operativo.

Tecniche avanzate come il controllo dinamico del rumore, la correzione degli errori quantistici in metrologia, e l'uso di subspazi decoherence-free possono aiutare a preservare il vantaggio quantistico in presenza di rumore realistico.

Entanglement nella Teoria Quantistica dei Campi

L'entanglement nella teoria quantistica dei campi (QFT) presenta caratteristiche distintive rispetto ai sistemi di particelle. In QFT, il vuoto quantistico è un stato altamente entangled: gradi di libertà del campo in regioni spazialmente separate sono intrinsecamente correlati.

Consideriamo un campo scalare quantistico φ̂(x) in spazio-tempo di Minkowski. Lo stato di vuoto |0⟩ è definito come l'autostato di energia minima dell'Hamiltoniano del campo. Questo stato non è un prodotto di stati "vuoti" locali, ma piuttosto un stato entangled che correla fluttuazioni in punti diversi.

Per quantificare questo entanglement, consideriamo una regione spaziale V e il suo complemento V̄. L'entropia di entanglement del vuoto tra queste regioni diverge all'aumentare dell'area del confine ∂V:

S_V = c (Area(∂V))/(ε^(d-2)) + subleading terms

dove d è la dimensione spaziale, ε è un cutoff ultravioletto, e c è una costante che dipende dalla teoria. Questa divergenza ultravioletta è una caratteristica generica dell'entanglement in QFT e riflette la natura continua del campo con infiniti gradi di libertà.

Per sistemi in 1+1 dimensioni, la QFT a un punto critico è descritta da una teoria di campo conforme (CFT). In questo caso, l'entropia di entanglement per un intervallo di lunghezza L ha la forma finita:

S_L = (c/3) log(L/ε) + const

dove c è la carica centrale della CFT. Questa formula universale connette l'entanglement alla struttura conforme della teoria ed è stata verificata numericamente e analiticamente in numerosi modelli.

L'entanglement in QFT è inoltre connesso alla termalità. Il teorema di Bisognano-Wichmann stabilisce che, per il vuoto di Minkowski, la matrice densità ridotta a una regione di Rindler (la regione accessibile a un osservatore uniformemente accelerato) è termale:

ρ_Rindler = e^(-2πK̂/a) / Z

dove K̂ è il generatore dei boost di Lorentz (l'Hamiltoniano di Rindler) e a è l'accelerazione propria. Questo è alla base dell'effetto Unruh discusso precedentemente.

Entanglement Topologico e Ordine Topologico

In sistemi quantistici a molti corpi con ordine topologico, l'entanglement acquisisce caratteristiche distintive che non possono essere catturate da misure locali. L'ordine

topologico è un tipo di ordine quantistico che non può essere caratterizzato da un parametro d'ordine locale e che è robusto contro perturbazioni locali.

Stati topologicamente ordinati mostrano degenerazione dello stato fondamentale che dipende dalla topologia del sistema. Su una superficie con genere g (numero di "buchi"), la degenerazione è tipicamente D^(2g), dove D è la dimensione quantica totale della teoria.

L'entropia di entanglement di una regione A in uno stato topologicamente ordinato segue una legge dell'area modificata:

$S_A = \alpha L - \gamma + O(1/L)$

dove L è il perimetro di A, α è una costante non universale, e γ è l'entropia topologica, una quantità universale che caratterizza la fase topologica. Per un sistema con ordine topologico abeliano con k tipi di anyon, l'entropia topologica è:

$\gamma = \log(k)$

Per teorie non-abeliane più complesse, $\gamma = \log(D)$, dove $D = \sqrt{(\Sigma_i d_i^2)}$ è la dimensione quantica totale e d_i sono le dimensioni quantiche delle particelle anioniche.

L'entropia topologica può essere estratta sperimentalmente o numericamente misurando l'entropia di entanglement per regioni di forme diverse. Una costruzione comune usa la combinazione:

$\gamma = S_A + S_B + S_C + S_D - S_{AB} - S_{BC} - S_{CD} - S_{DA} + S_{ABCD}$

dove le regioni A, B, C, D formano un quadrato e le varie combinazioni coprono diverse porzioni. Questa combinazione cancella i contributi dalla legge dell'area, isolando il termine topologico.

Entanglement Multipartito: Classi di Equivalenza e Strutture

Per sistemi di tre o più particelle, la struttura dell'entanglement diventa molto più ricca. Non esiste più una singola misura scalare che cattura completamente l'entanglement. Invece, ci sono molteplici classi di equivalenza di stati sotto LOCC, corrispondenti a diversi "tipi" qualitativi di entanglement.

Per tre qubit, esistono sei classi distinte di equivalenza sotto operazioni locali unitarie e permutazioni:

1. Stati completamente separabili: $|\psi\rangle = |a\rangle|b\rangle|c\rangle$
2. Stati biseparabili tipo A-BC: $|\psi\rangle = |a\rangle(\alpha|b\rangle|c\rangle + \beta|b'\rangle|c'\rangle)$
3. Stati W: $|W\rangle = (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)/\sqrt{3}$
4. Stati GHZ: $|GHZ\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}$ 5-6. Due classi aggiuntive più complesse

Gli stati W e GHZ rappresentano due tipi fondamentalmente diversi di entanglement tripartito. Gli stati W hanno la proprietà che se una particella viene tracciata via, le rimanenti

due sono ancora entangled. Gli stati GHZ, al contrario, diventano completamente separabili se una particella viene persa.

Per caratterizzare quantitativamente l'entanglement multipartito, sono state proposte varie misure. La tangibilità misura il numero minimo di copie massimamente entangled necessarie per preparare uno stato. La distillabilità multipartita caratterizza quanti stati GHZ possono essere estratti. La robustezza multipartita quantifica quanto "rumore bianco" può essere aggiunto prima che lo stato diventi completamente separabile.

Non esiste una misura universalmente accettata di entanglement multipartito che catturi tutti gli aspetti rilevanti. Diverse misure sono appropriate per diverse applicazioni. Questa ricchezza strutturale riflette la complessità intrinseca delle correlazioni quantistiche in sistemi di molte particelle.

L'Entanglement come Risorsa: Il Framework di Resource Theory

La teoria delle risorse quantistiche fornisce un framework matematico unificato per trattare l'entanglement e altre proprietà quantistiche come risorse che possono essere quantificate, manipolate e consumate. In questo framework, si specificano un insieme di operazioni "gratuite" (per l'entanglement, le operazioni LOCC) e si studiano quali trasformazioni di stati sono possibili usando solo queste operazioni.

Una misura di entanglement in questo contesto è definita da proprietà assiomatiche:

1. **Monotonicità**: L'entanglement non aumenta sotto LOCC
2. **Convessità**: L'entanglement di una miscela statistica non supera la media pesata
3. **Normalizzazione**: Stati separabili hanno entanglement zero, stati massimamente entangled hanno entanglement unitario

Queste proprietà garantiscono che la misura catturi genuinamente la "quantità di risorsa" presente nello stato.

Nel contesto del resource theory, l'entanglement di formazione E_F ha l'interpretazione come il costo asintotico di preparazione: il numero di stati di Bell massimamente entangled necessari per preparare molte copie di uno stato target usando LOCC. L'entanglement distillabile E_D ha l'interpretazione come il rendimento asintotico: il numero di stati di Bell che possono essere estratti da molte copie usando LOCC.

Per stati puri, $E_F = E_D = S(\rho_A)$, ma per stati misti generalmente $E_D \leq E_F$. La differenza $E_F - E_D$ rappresenta l'"irreversibilità" della manipolazione dell'entanglement: costa più creare uno stato di quanto si possa estrarre da esso.

Altre risorse quantistiche possono essere trattate in framework analoghi: coerenza (con operazioni incoerenti gratuite), asimmetria (con operazioni simmetriche gratuite), magia (con operazioni di Clifford gratuite). Queste diverse risorse sono interconnesse e possono essere convertite l'una nell'altra sotto certe condizioni, portando a una "economia" delle risorse quantistiche.

Conclusione Finale: L'Entanglement come Paradigma della Scienza Contemporanea

L'entanglement quantistico rappresenta molto più di un fenomeno fisico specifico o una risorsa tecnologica, per quanto importanti siano questi aspetti. Rappresenta un paradigma del modo in cui la scienza contemporanea affronta la comprensione della natura: attraverso l'integrazione di matematica rigorosa, verifica sperimentale meticolosa, innovazione tecnologica e riflessione filosofica profonda.

Il percorso dall'iniziale perplessità di Einstein di fronte alle "azioni spettrali a distanza" alla odierna manipolazione controllata di stati entangled in laboratori di tutto il mondo testimonia il potere del metodo scientifico di trasformare l'incomprensibile in comprensibile, l'impossibile in possibile. Questo percorso ha richiesto creatività teorica, ingegnosità sperimentale, coraggio intellettuale per abbandonare intuizioni consolidate, e rigore nel mantenere coerenza logica ed empirica.

L'entanglement ci ricorda che la realtà fisica non è obbligata a conformarsi alle nostre intuizioni pregresse. La natura opera secondo i propri principi, e il compito della scienza è scoprire questi principi attraverso interrogazione sistematica. Quando i nostri strumenti concettuali si rivelano inadeguati, dobbiamo svilupparne di nuovi, anche se richiedono di pensare in modi radicalmente diversi.

Allo stesso tempo, l'entanglement illustra la continuità fondamentale della scienza. Le domande che Einstein, Bohr, Bell e altri pionieri si posero negli anni '30, '60 e '70 del secolo scorso continuano a guidare la ricerca contemporanea. Le loro intuizioni, dibattiti e contributi rimangono rilevanti e ispiranti. La scienza progredisce non sostituendo completamente vecchie comprensioni con nuove, ma raffinando, estendendo e approfondendo la nostra conoscenza in un processo cumulativo.

L'entanglement ci mostra inoltre l'unità profonda della conoscenza scientifica. Fenomeni che superficialmente sembrano distinti - correlazioni tra particelle, struttura dello spazio-tempo, proprietà termodinamiche, transizioni di fase, computazione e informazione - sono tutti intimamente connessi attraverso il filo conduttore dell'entanglement. Questa unità riflette l'unità sottostante della natura stessa.

Guardando al futuro, possiamo anticipare che l'entanglement continuerà a sorprenderci, sfid arci e ispirarci. Nuovi fenomeni attendono di essere scoperti, nuove applicazioni attendono di essere sviluppate, nuove domande attendono di essere formulate. La storia dell'entanglement è ancora in corso di scrittura, e i capitoli più emozionanti potrebbero essere ancora da venire.

In ultima analisi, lo studio dell'entanglement è parte della millenaria ricerca umana di comprendere la natura fondamentale della realtà. È una manifestazione dello stupore, della curiosità e dell'aspirazione alla conoscenza che definiscono l'umanità al suo meglio. Attraverso l'entanglement, non impariamo solo sulla fisica quantistica, ma sulla natura della conoscenza stessa, sui limiti e le possibilità della comprensione umana, e sul nostro posto in un universo che è infinitamente più ricco, più sottile e più meraviglioso di quanto avremmo potuto immaginare.Tuttavia, il vantaggio offerto dagli stati entangled è fragile di fronte al

rumore e alla decoerenza. Anche piccole quantità di rumore possono degradare rapidamente lo scaling da N^2 a N, eliminando il vantaggio quantistico. Questo ha motivato la ricerca di stati entangled più robusti e schemi di metrologia tolleranti al rumore.

Gli stati squeezed di spin rappresentano un compromesso interessante: offrono un miglioramento sulla precisione rispetto a stati separabili (scaling ~ N^(3/2)) pur essendo più robusti degli stati GHZ. Questi stati sono stati realizzati sperimentalmente e utilizzati per migliorare la sensibilità di orologi atomici e interferometri.

Dinamiche Non-Markoviane e Recupero dell'Entanglement

La maggior parte dei trattamenti della decoerenza assumono dinamiche markoviane, dove l'ambiente non ha memoria e l'evoluzione del sistema dipende solo dal suo stato presente, non dalla sua storia. Tuttavia, in molti sistemi reali, l'ambiente ha una struttura temporale e correlazioni finite, portando a dinamiche non-markoviane.

In regime non-markoviano, possono verificarsi fenomeni sorprendenti come il recupero dell'entanglement. Un sistema che inizialmente perde entanglement a causa dell'interazione con l'ambiente può successivamente recuperare parte di questo entanglement quando l'informazione "rifluisce" dall'ambiente al sistema.

Questo comportamento può essere compreso considerando che, in un processo non-markoviano, il sistema e l'ambiente rimangono parzialmente entangled. Se l'ambiente ha una struttura temporale correlata, può re-iniettare coerenza nel sistema a tempi successivi. Matematicamente, la mappa che descrive l'evoluzione temporale del sistema può essere non completamente positiva in intervalli di tempo intermedi, indicando che l'assunzione markoviana è violata.

La quantificazione della non-markovianità è stata oggetto di intensa ricerca. Una misura proposta è basata sulla crescita della tracciabilità, definita in termini della norma traccia della differenza tra stati:

$$N = \max_{\rho_1,\rho_2} \int_{d\sigma/dt>0} (d\sigma/dt)\, dt$$

dove $\sigma(t) = ||\rho_1(t) - \rho_2(t)||_1/2$ è la tracciabilità. Per processi markoviani, $\sigma(t)$ è monotonicamente decrescente, quindi $N = 0$. Per processi non-markoviani, $\sigma(t)$ può aumentare in certi intervalli di tempo, dando $N > 0$.

Il recupero dell'entanglement è stato osservato sperimentalmente in vari sistemi, inclusi fotoni che interagiscono con cavità strutturate e spin nucleari in cristalli. Questi risultati hanno implicazioni per la progettazione di architetture di calcolo quantistico: controllare strutturando l'ambiente può essere una strategia per preservare o recuperare risorse quantistiche.

Entanglement e Termalizzazione nei Sistemi Quantistici

Una questione fondamentale nella meccanica statistica quantistica riguarda come i sistemi quantistici isolati evolvono verso l'equilibrio termico. L'entanglement gioca un ruolo cruciale in questo processo di termalizzazione.

La congettura di Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH) propone che gli stati di energia definita (autostati dell'Hamiltoniano) di sistemi quantistici caotici si comportano localmente come stati termici. Più precisamente, per un sottosistema A di un sistema isolato, se lo stato totale è un autostato $|E\rangle$ dell'Hamiltoniano, allora la matrice densità ridotta $\rho_A \approx \rho_{th}(T)$ dove T è la temperatura determinata dall'energia E.

L'ETH implica che l'entanglement tra A e il resto del sistema cresce con l'energia, raggiungendo valori vicini al massimo per stati ad alta energia. Questo alto entanglement è responsabile per l'apparente termalizzazione del sottosistema: sebbene lo stato totale sia puro, il sottosistema si comporta come se fosse in un bagno termico a causa del forte entanglement con i gradi di libertà esterni.

Tuttavia, non tutti i sistemi obbediscono all'ETH. I sistemi integrabili, che possiedono un numero estensivo di costanti del moto in involuzione, generalmente violano l'ETH. I loro autostati mantengono memoria delle condizioni iniziali e non termalizzano completamente. L'entanglement in questi sistemi cresce più lentamente, spesso logaritmicamente piuttosto che linearmente con il volume del sottosistema.

Un fenomeno ancora più drammatico è la many-body localization (MBL), dove un sistema fortemente disordinato può fallire completamente di termalizzare. Gli stati MBL violano l'ETH e mantengono memoria delle condizioni iniziali indefinitamente. L'entanglement in fasi MBL cresce solo logaritmicamente con il tempo dopo un quench quantistico, in contrasto con la crescita lineare in sistemi termalizzanti.

La transizione tra fase termalizzante e fase MBL al variare della forza del disordine è accompagnata da cambiamenti drastici nella struttura dell'entanglement. Questa transizione rappresenta una delle frontiere attive della ricerca nella fisica dei sistemi a molti corpi quantistici.

Entanglement nei Sistemi Relativistici e l'Effetto Unruh

L'entanglement in sistemi quantistici relativistici presenta caratteristiche peculiari legate alla struttura causale dello spazio-tempo. Un esempio sorprendente è l'effetto dell'accelerazione sull'entanglement, manifestato nell'effetto Unruh e nella radiazione di Hawking.

L'effetto Unruh stabilisce che un osservatore uniformemente accelerato nel vuoto quantistico percepisce un bagno termico di particelle a temperatura:

$$T_U = (a\hbar)/(2\pi c k_B)$$

dove a è l'accelerazione propria dell'osservatore. Questo significa che lo stato di vuoto di un osservatore inerziale appare come uno stato termico a un osservatore accelerato.

Per comprendere questo in termini di entanglement, consideriamo il vuoto quantistico di un campo scalare nel spazio-tempo di Minkowski. Questo stato può essere scritto come una

sovrapposizione di modi di frequenza positiva e negativa. Per un osservatore inerziale, il vuoto $|0_M\rangle$ è uno stato definito senza particelle.

Tuttavia, un osservatore uniformemente accelerato utilizza un diverso insieme di modi (modi di Rindler) per descrivere il campo. I modi di Minkowski e i modi di Rindler sono correlati da una trasformazione di Bogoliubov. Il vuoto di Minkowski, quando espresso in termini di modi di Rindler, diventa:

$$|0_M\rangle = (1/\sqrt{Z}) \Sigma_n \exp(-\pi\omega n/a) |n\rangle_R|n\rangle_L$$

dove $|n\rangle_R$ e $|n\rangle_L$ sono stati di Fock per i modi di Rindler nelle regioni destra e sinistra del cuneo di Rindler, e Z è una costante di normalizzazione. Questo è uno stato massimamente entangled tra le regioni accessibile e inaccessibile all'osservatore accelerato.

L'osservatore accelerato, che ha accesso solo alla regione destra, vede quindi una matrice densità ridotta termale:

$$\rho_R = (1/Z) \Sigma_n \exp(-2\pi\omega n/a) |n\rangle_R\langle n|_R$$

che corrisponde esattamente a uno stato termico alla temperatura di Unruh. L'entanglement del vuoto quantistico tra regioni causalmente disconnesse per l'osservatore accelerato è responsabile per la percezione di particelle termiche.

Un fenomeno analogo si verifica vicino all'orizzonte degli eventi di un buco nero, portando alla radiazione di Hawking. Il vuoto quantistico vicino all'orizzonte è entangled attraverso l'orizzonte. Un osservatore esterno vede solo la parte esterna di questo stato entangled, che appare come radiazione termica.

Entanglement e Wormholes: La Congettura ER=EPR

Una delle connessioni più speculative ma affascinanti riguarda la relazione tra entanglement quantistico e geometria dello spazio-tempo, sintetizzata nella congettura ER=EPR proposta da Maldacena e Susskind nel 2013.

La congettura propone una dualità profonda tra due fenomeni apparentemente distinti: le coppie EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) di particelle entangled e i ponti ER (Einstein-Rosen) o wormholes che connettono regioni distanti dello spazio-tempo. In termini semplici: l'entanglement quantistico è equivalente a una connessione geometrica attraverso lo spazio-tempo.

La motivazione originale venne dal paradosso dei firewall dei buchi neri. Se un buco nero evapora completamente tramite radiazione di Hawking, l'informazione deve essere preservata per mantenere l'unitarietà della meccanica quantistica. Questo richiede che i quanti di radiazione emessi tardivamente siano entangled sia con i quanti emessi precocemente (già lontani) sia con l'interno del buco nero. Ma la monogamia dell'entanglement sembra impedire questo entanglement multiplo.

Maldacena e Susskind proposero che l'entanglement tra la radiazione precoce e tardiva è geometricamente realizzato da un wormhole che connette queste regioni attraverso l'interno

del buco nero. In questa visione, ciò che pensiamo come particelle entangled non-localmente sono in realtà connesse da una struttura geometrica microscopica.

Nella corrispondenza AdS/CFT, questa idea ha manifestazioni concrete. Stati entangled nella teoria di campo conforme sul confine corrispondono a wormholes nello spazio AdS interno. Uno stato di Bell condiviso da due regioni disconnesse del confine corrisponde a un wormhole che connette queste regioni attraverso lo spazio-tempo gravitazionale.

Questa congettura suggerisce che lo spazio-tempo stesso emerge dall'entanglement. A un livello fondamentale, la geometria dello spazio-tempo potrebbe essere una descrizione macroscopica di pattern di entanglement in un sistema quantistico più fondamentale. In questa visione, l'entanglement non è solo una proprietà di particelle che esistono nello spazio-tempo, ma è il substrato da cui lo spazio-tempo stesso emerge.

Entanglement in Cosmologia Quantistica

L'entanglement gioca anche un ruolo interessante nella cosmologia quantistica, in particolare nella teoria dell'inflazione e nella generazione di perturbazioni primordiali che seminano la struttura su larga scala dell'universo.

Durante l'inflazione, le fluttuazioni quantistiche del campo inflaton vengono stirate fino a scale cosmologiche dall'espansione esponenziale dell'universo. Queste fluttuazioni sono inizialmente modi del vuoto quantistico, che sono entangled attraverso lo spazio. Man mano che vengono stirate oltre l'orizzonte cosmico, queste correlazioni quantistiche "congelano" e diventano correlazioni classiche nella densità di materia.

Matematicamente, i modi di fluttuazione dentro e fuori l'orizzonte sono entangled in modo simile all'entanglement tra regioni di Rindler nell'effetto Unruh. Quando un modo attraversa l'orizzonte ed esce dalla regione causalmente connessa con un osservatore, l'entanglement tra questo modo e i modi all'interno dell'orizzonte si manifesta come un'apparente decoerenza e classicizzazione delle fluttuazioni.

L'entropia di entanglement associata all'orizzonte cosmico è stata calcolata ed è proporzionale all'area dell'orizzonte, simile all'entropia di Bekenstein-Hawking di un buco nero. Questo suggerisce una connessione profonda tra la fisica degli orizzonti cosmologici e quella dei buchi neri, entrambe governate dall'entanglement quantistico attraverso superfici causali.

Recentemente, sono state proposte firme osservabili dell'entanglement primordiale nella radiazione cosmica di fondo. Mentre le osservazioni attuali sono consistenti con fluttuazioni gaussiane classiche, future osservazioni ad alta precisione potrebbero rivelare sottili non-gaussianità che portano traccia dell'origine quantistica entangled delle strutture cosmiche.

Simulazione Quantistica e Entanglement

La simulazione quantistica - l'uso di sistemi quantistici controllabili per simulare altri sistemi quantistici - rappresenta una delle applicazioni più promettenti dell'entanglement. Feynman osservò che simulare un sistema quantistico generale su un computer classico richiede risorse che crescono esponenzialmente con la dimensione del sistema, mentre un computer quantistico potrebbe simularlo efficientemente.

I simulatori quantistici si dividono in due categorie: analogici e digitali. Un simulatore quantistico analogico implementa direttamente l'Hamiltoniano del sistema target, permettendo l'evoluzione naturale del sistema. Un simulatore quantistico digitale decompone l'evoluzione in sequenze di porte quantistiche elementari, analogamente a come un computer digitale classico opera.

Sistemi di atomi ultrafreddi in reticoli ottici sono emersi come piattaforme versatili per la simulazione quantistica analogica. Questi sistemi possono realizzare vari modelli di spin e Hamiltoniani di Hubbard, permettendo lo studio di fenomeni come transizioni di fase quantistiche, superfluidità e localizzazione di molti corpi. L'entanglement multipartito generato in questi sistemi può raggiungere complessità che non possono essere simulate classicamente.

Gli ioni intrappolati forniscono un'altra piattaforma potente, particolarmente adatta per simulazioni digitali. Catene di ioni possono implementare interazioni di spin a lungo raggio attraverso modi fononi condivisi, creando Hamiltoniani non raggiungibili in sistemi a stato solido. L'entanglement multipartito in catene di oltre 20 ioni è stato dimostrato sperimentalmente.

I processori quantistici superconduttori, sviluppati da aziende come Google, IBM e Rigetti, stanno raggiungendo la scala e la fedeltà necessarie per simulazioni quantistiche interessanti. L'esperimento della "supremazia quantistica" di Google nel 2019 ha dimostrato un calcolo quantistico (seppur artificiale) che richiederebbe tempi impraticabili su computer classici. Questo calcolo coinvolgeva la generazione di stati altamente entangled di 53 qubit.

Entanglement Tra Sistemi Macroscopici

Mentre l'entanglement è tipicamente associato a particelle microscopiche, negli ultimi due decenni sono stati realizzati stati entangled di oggetti progressivamente più grandi e macroscopici. Questo solleva questioni fondamentali sul confine tra mondo quantistico e classico.

Nel 2003, il gruppo di Zeilinger a Vienna ha dimostrato l'entanglement tra fullereni C_{60} e C_{70}, molecole costituite rispettivamente da 60 e 70 atomi di carbonio. Questi esperimenti hanno utilizzato interferenza a due percorsi per verificare la coerenza quantistica di queste molecole relativamente grandi.

Esperimenti successivi hanno dimostrato entanglement tra modi meccanici macroscopici. Nel 2010, due gruppi hanno simultaneamente dimostrato il raffreddamento di oscillatori meccanici al loro stato fondamentale quantistico. Questo ha aperto la strada alla preparazione di stati entangled tra modi meccanici e gradi di libertà elettromagnetici.

Nel 2011, il gruppo di Cleland ha dimostrato entanglement tra due risonatori meccanici separati, ciascuno costituito da miliardi di atomi. I risonatori erano accoppiati attraverso un qubit superconduttore, che mediava la generazione di entanglement. Sebbene gli stati entangled fossero fragili e persistessero solo per nanosecondi, la dimostrazione ha stabilito che l'entanglement non è limitato al regime microscopico.

Più recentemente, esperimenti con membrane oscillanti e specchi di interferometri hanno spinto ancora più in là il confine, dimostrando effetti quantistici in oggetti visibili a occhio nudo. Il premio Nobel per la Fisica 2012 è stato assegnato a Haroche e Wineland in parte per il loro lavoro nel controllare e misurare sistemi quantistici individuali, includendo la preparazione di stati entangled di sistemi mesoscopici.

Questi esperimenti non solo dimostrano la validità universale della meccanica quantistica, ma sollevano anche questioni sulla transizione quantistico-classica. Perché non osserviamo entanglement macroscopico nella vita quotidiana? La risposta risiede nella decoerenza: oggetti macroscopici sono inevitabilmente accoppiati fortemente all'ambiente, e i tempi di decoerenza sono estremamente brevi, rendendo impossibile l'osservazione di stati entangled macroscopici in condizioni normali.

Entanglement e Complessità Computazionale

L'entanglement è intimamente connesso alla complessità computazionale dei sistemi quantistici. La difficoltà di simulare un sistema quantistico su un computer classico è direttamente legata alla quantità e struttura dell'entanglement nel sistema.

Un risultato fondamentale è che sistemi quantistici con entanglement limitato possono essere simulati efficientemente su computer classici. Questo è il principio alla base dei metodi tensor network come DMRG (Density Matrix Renormalization Group). Per sistemi unidimensionali con entanglement che obbedisce alla legge dell'area, gli stati possono essere rappresentati come Matrix Product States con dimensione del bond polinomiale, permettendo simulazioni efficienti.

Al contrario, stati con entanglement che viola la legge dell'area richiedono generalmente risorse esponenziali per essere rappresentati e simulati. Stati random di n qubit tipicamente hanno entanglement che scala come n (massimo possibile), e richiedono 2^n parametri complessi per essere completamente specificati. Nessun algoritmo classico efficiente è noto per simulare l'evoluzione di tali stati.

Questa connessione ha portato alla congettura che la "potenza" del calcolo quantistico deriva dalla capacità di manipolare stati con alto entanglement multipartito. Gli algoritmi quantistici che forniscono accelerazioni rispetto agli algoritmi classici, come l'algoritmo di Shor e l'algoritmo di Grover, generano entanglement durante la loro esecuzione.

Tuttavia, la relazione precisa tra entanglement e velocità computazionale non è completamente compresa. Alcuni circuiti quantistici che possono essere simulati efficientemente classicamente (come i circuiti di Clifford) generano comunque entanglement esteso. Conversely, alcuni circuiti con poco entanglement possono essere difficili da

simulare se hanno altre proprietà come high magic (una risorsa complementare all'entanglement).

La classe di complessità BQP (Bounded-error Quantum Polynomial time), che cattura i problemi risolvibili efficientemente da computer quantistici, è caratterizzata da famiglie di circuiti quantistici polinomialmente grandi. Si congettura che BQP sia strettamente più grande di P (la classe dei problemi risolvibili efficientemente classicamente) ma contenuto in PSPACE (la classe dei problemi risolvibili con spazio polinomiale).

Entanglement e il Problema della Misura Rivisitato

Ritornando alle questioni filosofiche fondamentali, l'entanglement offre una prospettiva unica sul problema della misura quantistica. Nella formulazione standard, il problema sorge perché l'equazione di Schrödinger predice che il sistema e l'apparato di misura evolvono verso uno stato entangled:

$|\psi\rangle_{sistema}|ready\rangle_{apparato} \rightarrow \Sigma_i c_i|i\rangle_{sistema}|i\rangle_{apparato}$

ma osserviamo sempre risultati definiti, non sovrapposizioni. Come e quando avviene il "collasso"?

La decoerenza fornisce un'importante parte della risposta. Quando includiamo l'ambiente, lo stato diventa:

$\Sigma_i c_i|i\rangle_{sistema}|i\rangle_{apparato}|E_i\rangle_{ambiente}$

Se gli stati ambientali $|E_i\rangle$ sono approssimativamente ortogonali (rapidamente diventano tali per sistemi macroscopici), allora la matrice densità ridotta del sistema+apparato diventa diagonale nella base dei risultati di misura:

$\rho_{sistema+apparato} \approx \Sigma_i |c_i|^2 |i\rangle\langle i|_{sistema} \otimes |i\rangle\langle i|_{apparato}$

Questo spiega l'apparenza di risultati definiti: la coerenza tra termini diversi è distrutta dall'entanglement con l'ambiente. Tuttavia, la decoerenza da sola non risolve completamente il problema della misura. La matrice densità diagonale descrive ancora una miscela statistica, non un risultato definito unico. Non spiega perché, in una singola esecuzione dell'esperimento, osserviamo il risultato i con probabilità $|c_i|^2$ piuttosto che tutti i risultati simultaneamente con pesi $|c_i|^2$.

L'interpretazione a molti mondi di Everett accetta lo stato entangled come completa descrizione della realtà, interpretando i diversi termini come "rami" della funzione d'onda universale, tutti ugualmente reali. In questa visione, non c'è collasso: ogni risultato possibile si realizza in un ramo diverso, e gli osservatori in rami diversi non possono comunicare tra loro a causa della decoerenza.

Le teorie del collasso oggettivo modificano l'equazione di Schrödinger aggiungendo termini stocastici che causano collassi spontanei. Nel modello GRW, ogni particella subisce collassi spontanei con un tasso molto basso ($\sim 10^{-16}$ s^{-1}). Per sistemi microscopici isolati, questo è trascurabile. Ma per sistemi macroscopici con molte particelle (come apparati di misura), il

tasso effettivo di collasso diventa rapido, localizzando efficacemente il sistema in uno dei risultati possibili.

L'entanglement è centrale in tutte queste interpretazioni, ma il suo ruolo e significato variano. In Copenaghen, l'entanglement sistema-apparato è ciò che definisce una "misura". In Everett, l'entanglement sistema-apparato-ambiente crea la struttura dei rami. Nelle teorie del collasso, l'entanglement con molte particelle aumenta il tasso di collasso.

Verso una Sintesi: L'Entanglement come Struttura Fondamentale

Riflettendo sul panorama completo di fenomeni e teorie discussi, emerge una visione unificata dell'entanglement come una delle strutture più fondamentali della realtà fisica. Non è meramente una proprietà peculiare di certi stati quantistici, ma piuttosto un principio organizzativo che sottende fenomeni attraverso scale e domini fisici diversissimi.

A livello microscopico, l'entanglement determina le proprietà chimiche delle molecole attraverso il legame covalente, che è essenzialmente uno stato entangled di elettroni condivisi tra atomi. Le proprietà magnetiche di materiali derivano dall'entanglement tra spin elettronici. La superconduttività e la superfluidità sono fenomeni macroscopici quantistici dove un numero macroscopico di particelle condivide uno stato entangled coerente.

A livello mesoscopico e macroscopico, l'entanglement governa le transizioni di fase quantistiche, distingue fasi topologiche della materia, e determina se un sistema termalizza o mantiene memoria delle condizioni iniziali. La sua presenza o assenza classifica universalità di comportamenti critici.

A livello cosmologico, l'entanglement primordiale ha seminato le strutture che vediamo nell'universo contemporaneo. L'entanglement attraverso orizzonti cosmici e di buchi neri determina l'entropia associata a questi orizzonti e potrebbe essere la chiave per comprendere la natura quantistica della gravità.

A livello fondamentale della teoria, l'entanglement potrebbe essere il costituente da cui emerge lo spazio-tempo stesso. La congettura ER=EPR e la formula di Ryu-Takayanagi suggeriscono che la geometria è una descrizione macroscopica di pattern microscopici di entanglement. In questa visione, la domanda "cosa è più fondamentale, lo spazio-tempo o l'entanglement?" si risolve in favore dell'entanglement.

Questa sintesi suggerisce un profondo cambio di paradigma nella nostra comprensione della natura. La fisica classica vedeva l'universo come costituito da oggetti localizzati nello spazio e nel tempo, che interagiscono attraverso forze. La meccanica quantistica, e in particolare l'entanglement, suggerisce una visione più olistica e relazionale: la realtà fondamentale consiste di pattern di correlazioni e relazioni, da cui emergono gli oggetti localizzati come approssimazioni efficaci.

Prospettive Future: Verso una Comprensione Più Profonda

Nonostante decenni di ricerca, l'entanglement continua a rivelare nuove sorprese e applicazioni. Le tecnologie quantistiche emergenti - computer quantistici, reti quantistiche, sensori quantistici - sono tutte basate sulla manipolazione e sfruttamento dell'entanglement. Man mano che queste tecnologie maturano, la nostra comprensione pratica dell'entanglement si approfondisce.

Dal punto di vista teorico, importanti questioni rimangono aperte. La caratterizzazione completa dell'entanglement multipartito è ancora incompleta. Mentre comprendiamo bene l'entanglement bipartito, i sistemi di tre o più particelle mostrano una ricchezza di strutture di entanglement che non sono ancora completamente comprese. Esistono molteplici classi di equivalenza di stati entangled multipartiti sotto operazioni locali, e non esiste ancora una teoria completa di come queste classi sono organizzate.

La questione di come l'entanglement emerga dall'interazione e come possa essere protetto dalla decoerenza rimane centrale per lo sviluppo di tecnologie quantistiche pratiche. I codici di correzione degli errori quantistici, che utilizzano l'entanglement per proteggere l'informazione quantistica dalla decoerenza, rappresentano un'area attiva di ricerca. Il codice superficiale e altre forme di codici topologici mostrano promessa per realizzare computer quantistici fault-tolerant.

La connessione tra entanglement e gravità quantistica è forse l'area più speculativa ma potenzialmente più rivoluzionaria. Se lo spazio-tempo emerge davvero dall'entanglement, come suggerito dalla corrispondenza AdS/CFT e dalla formula di Ryu-Takayanagi, allora comprendere l'entanglement diventa essenziale per comprendere la natura fondamentale della realtà fisica. Il programma "It from Qubit", che cerca di derivare lo spazio-tempo dalla teoria dell'informazione quantistica, rappresenta uno dei fronti più audaci della fisica teorica contemporanea.

Conclusioni: L'Entanglement come Finestra sulla Natura della Realtà

L'entanglement quantistico si è rivelato molto più di una curiosità matematica o un'anomalia teorica. È una caratteristica fondamentale e ineliminabile della natura quantistica della realtà. La sua scoperta e lo studio sistematico delle sue proprietà hanno trasformato la nostra comprensione della fisica, della computazione, dell'informazione e, più profondamente, della natura della realtà stessa.

Sul piano empirico, l'entanglement è stato verificato sperimentalmente in innumerevoli contesti, dalle coppie di fotoni ai sistemi superconduttori macroscopici. Gli esperimenti di Aspect e i successivi test sempre più stringenti delle disuguaglianze di Bell hanno confermato oltre ogni ragionevole dubbio che la natura viola il realismo locale. Il mondo quantistico è genuinamente non-locale nel senso che le correlazioni tra eventi spazialmente separati non possono essere spiegate da variabili nascoste locali.

Sul piano teorico, l'entanglement è diventato centrale nella teoria dell'informazione quantistica, fornendo la risorsa fondamentale per il teletrasporto, la crittografia quantistica e il calcolo quantistico. La sua caratterizzazione matematica attraverso misure come l'entropia di entanglement, la concorrenza e la negatività ha permesso di quantificare questa risorsa e di studiarne sistematicamente le trasformazioni.

Sul piano filosofico, l'entanglement ha profonde implicazioni per questioni metafisiche ed epistemologiche. Sfida le nozioni intuitive di località, separabilità e individualità. Suggerisce che la realtà fisica è fondamentalmente olistica, con le relazioni che hanno una priorità ontologica sugli oggetti correlati. La natura contestuale delle proprietà quantistiche, rivelata dai teoremi di Bell e Kochen-Specker, sfida il realismo ingenuo e richiede un ripensamento di cosa significhi che qualcosa "esista" o abbia una "proprietà".

Forse la lezione più profonda dell'entanglement è epistemologica: ci ricorda i limiti della nostra intuizione classica nel comprendere il mondo fisico. Le nostre intuizioni sono state formate dall'esperienza con oggetti macroscopici che si comportano in modi essenzialmente classici. L'entanglement mostra che a livello fondamentale, la natura opera secondo principi radicalmente diversi da quelli familiari.

Eppure, nonostante la sua natura controintuitiva, l'entanglement è matematicamente ben definito e sperimentalmente accessibile. Questo testimonia il potere della scienza di estendere la nostra comprensione oltre i limiti dell'intuizione immediata. La meccanica quantistica, con l'entanglement al suo cuore, rappresenta uno dei più grandi trionfi intellettuali dell'umanità, una teoria che è simultaneamente profondamente strana e straordinariamente accurata.

Guardando al futuro, l'entanglement continuerà a guidare sia lo sviluppo tecnologico che la comprensione teorica. Le tecnologie quantistiche promettono di rivoluzionare la computazione, la comunicazione e la sensoristica. La ricerca fondamentale sull'entanglement in sistemi a molti corpi, nella gravità quantistica e in contesti cosmologici continuerà a rivelare nuove sorprese e approfondire la nostra comprensione della natura.

L'entanglement quantistico rappresenta quindi molto più di un fenomeno fisico particolare. È una finestra su una realtà più profonda e sottile di quanto i nostri sensi possano direttamente percepire, un invito a riconsiderare le nostre assunzioni più basilari sulla natura dell'esistenza, e una risorsa pratica per tecnologie future che appena iniziamo a immaginare. Nel suo intreccio di profondità matematica, rilevanza fisica, potenza tecnologica e significato filosofico, l'entanglement esemplifica il meglio di ciò che la scienza può offrire: una comprensione della natura che è insieme rigorosa, sorprendente e profondamente illuminante.

Forse la lezione più importante dell'entanglement è una lezione di umiltà epistemica. La natura, a livello fondamentale, opera secondo principi che sfidano la nostra intuizione formata dall'esperienza macroscopica. Tuttavia, attraverso la matematica rigorosa e l'esperimento controllato, possiamo estendere la nostra comprensione oltre i limiti dell'intuizione immediata, accedendo a verità sulla natura che altrimenti rimarrebbero nascoste.

L'entanglement ci mostra che l'universo è più interconnesso, più olistico e più sottile di quanto una visione riduzionista e meccanicistica possa catturare. Le parti non precedono il tutto, ma emergono dal tutto attraverso processi di localizzazione e decoerenza. Le proprietà non esistono indipendentemente dal contesto di osservazione, ma emergono nell'atto di misurazione. La causalità non è semplice propagazione locale di influenze, ma include correlazioni non-locali che rispettano comunque la struttura causale relativistica.

Queste intuizioni hanno risonanze che vanno oltre la fisica. La visione olistica suggerita dall'entanglement ha influenzato discussioni in filosofia della mente, nella teoria dei sistemi complessi, e persino in questioni ecologiche e sociali. Sebbene sia necessario essere cauti nell'estendere metafore quantistiche troppo liberamente a domini non quantistici, il modello concettuale di realtà interconnessa e relazionale che emerge dallo studio dell'entanglement offre una prospettiva alternativa al riduzionismo atomistico che ha dominato il pensiero occidentale.

Guardando avanti, l'entanglement continuerà a essere centrale sia per lo sviluppo tecnologico che per la comprensione teorica. Le prossime generazioni di fisici, ingegneri e filosofi esploreranno regioni sempre più profonde dello spazio degli stati entangled, scoprendo nuovi fenomeni, sviluppando nuove applicazioni e forse rispondendo a domande fondamentali sulla natura dello spazio, del tempo, della materia e della coscienza.

Il viaggio di comprensione dell'entanglement è lungi dall'essere completo. Ogni risposta solleva nuove domande, ogni esperimento apre nuove possibilità, ogni applicazione suggerisce ulteriori direzioni di ricerca. In questo senso, l'entanglement esemplifica la natura aperta e progressiva della scienza: non un corpo statico di verità definitive, ma un processo continuo di interrogazione, scoperta e raffinamento della nostra comprensione.